Baccalauréat 2018 série S, France métropolitaine 22 Juin 2018

Exercice 1

1) La largeur de la chaînette vaut $2x$ (on a supposé $x \geq 0$). Sa hauteur est l'ordonnée du point M soit $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$. L'égalité entre la hauteur et la largeur équivaut donc à trouver les $x \geq 0$ vérifiant $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) = 2x$, ce qu'on peut re-écrire $e^x + e^{-x} - 2 = 4x$ ou encore $e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$.
Connaissances requises 2^{nde}. Difficulté : facile.

2a) Comme on suppose dans cette question que x est non nul, on peut mettre x en facteur dans l'expression $e^x - 4x$ ce qui donne $x(\frac{e^x}{x} - 4)$. $f(x)$ s'écrit alors: $x(\frac{e^x}{x} - 4) + e^{-x} - 2$.
Connaissances requises 4^e. Difficulté : très facile.

2b) On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - 4 = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} x(\frac{e^x}{x} - 4) = +\infty$.
D'autre part on sait que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} - 2 = -2$ et en ajoutant les deux expressions, la première tendant vers l'infini, la deuxième vers une constante, la somme tend vers $+\infty$. En conclusion, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

3a) $f'(x) = e^x + (-1)e^{-x} - 4 = e^x - e^{-x} - 4$.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

3b) Si x vérifie $f'(x) = 0$, x vérifie donc $e^x - e^{-x} - 4 = 0$. En multipliant cette égalité par e^x on obtient $(e^x)^2 - e^{x-x} - 4e^x = 0 = (e^x)^2 - 1 - 4e^x$ qui est l'égalité demandée.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

3c) En notant $X = e^x$, la précédente égalité devient $X^2 - 4X - 1 = 0$. $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 20$. Les racines du polynôme sont donc :

$$X_1 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = 2 - \sqrt{4 \times 5}/2 = 2 - \sqrt{5}$$

et

$$X_2 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = 2 + \sqrt{4 \times 5}/2 = 2 + \sqrt{5}$$

On cherche donc x tel que $e^x = X_1$ ou bien tel que $e^x = X_2$. La première équation n'a pas de solution car X_1 est négatif alors que l'exponentielle est toujours strictement positive. En effet $\sqrt{5} > \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est croissante, donc $\sqrt{5} > 2$ et donc $X_1 = 2 - \sqrt{5} < 0$. Reste l'équation $e^x = X_2$, donc $ln(e^x) = ln(X_2)$ et donc $x = ln(X_2) = ln(2 - \sqrt{5})$
Connaissances requises 2^{nde} pour les solutions du polynôme, TS pour la suite. Difficulté : assez facile.

4a) Le travail est déjà à moitié fait par la donnée du tableau de signe de la dérivée. En 0 on a $f(0) = e^0 + e^0 - 4 \times 0 - 2 = 0$. La limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ car e^x tend vers $+\infty$ et e^{-x} tend vers 0 en $+\infty$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	$ln(2+\sqrt{5})$	$+\infty$
$f(x)$	0 $\searrow$		$\nearrow$ $+\infty$

Connaissances requises 1^{ere} *excepté le calcul de $f(0)$ et la limite en $+\infty$ (TS). Difficulté : très facile.*

4b) *Le seul théorème du cours de terminale permettant de justifier l'existence d'une solution unique d'une équation $f(x) = 0$ que l'on ne sait pas résoudre de façon algébrique est le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions monotones. Pas de mystère donc, c'est cela qu'il faut utiliser ici.*

Comme $f(0) = 0$ et que f est strictement décroissante sur $[0; ln(2+\sqrt{5})]$, f ne peut s'annuler que en 0 sur cet intervalle. Comme on cherche une solution strictement positive il faut chercher sur $[ln(2+\sqrt{5}); +\infty[$. De ce qui précède on déduit aussi que $f(ln(2+\sqrt{5})) < 0$. De plus, comme la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$, il existe un réel $x_0 > ln(2+\sqrt{5})$ tel que pour tout $x > x_0$, alors $f(x) > 0$. f ne peut donc s'annuler au delà de x_0 et f change de signe entre $ln(2+\sqrt{5})$ et x_0. Comme sur cet intervalle f est continue (car les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues), et qu'elle est de plus monotone, elle s'annule une fois et une seule sur cet intervalle, en un nombre réel qu'on notera α.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

5a)

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2.5	2	2.5	0.5
2.25	2.25	2.5	0.25
2.375	2.375	2.5	0.125
2.4375	2.4375	2.5	0.0625

Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

5b) En fin d'algorithme les valeurs de a et b obtenues donnent un encadrement à $0,1$ près du nombre α cherché à la question précédente.

On peut dire que c'était une des rares questions difficiles de ce sujet, car il y a en effet fort à parier que les algorithmes ont été survolés rapidement par beaucoup d'enseignants par manque de temps. Pour autant, la plupart des sujets proposés ces derniers temps contenaient des algorithmes simples de ce type, il n'y avait donc aucune surprise à en trouver un dans cet énoncé.... Ici il s'agissait de reconnaître l'algorithme de résolution d'une équation par dichotomie, algorithme très classique en terminale S.
Connaissances requises TS. Difficulté : difficile.

6) La solution t de E' vérifie $\dfrac{t}{39} = \alpha$ d'après la question 4, donc $t = 39\alpha$ et la hauteur cherchée valant le double de t, cette hauteur vaut 78α, qui d'après la question 6 est dans l'intervalle $[190,125; 195]$, les nombres étant exprimés en metres.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

Exercice 2

A 1a) L'énoncé indique que 20% de la population a contracté la grippe donc on a $P(G) = 0,2$.
Connaissances requises TS. Difficulté : très facile.

A 1b)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & 0,08 & G \\
 & & & \nearrow & \\
 & 0,4 & V & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & 0,92 & \bar{G} \\
\nearrow & & & & \\
\searrow & & & & \\
 & & & p_1 & G \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & 0,6 & \bar{V} & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & p_2 & \bar{G}
\end{array}$$

Remarque: dans cette question on ne demandait même pas p_1 ni p_2 qui sont demandés plus tard.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

A 2) La probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée vaut d'après le 1b $0,4 \times 0,08 = 0,032$.
Connaissances requises TS. Difficulté : très facile.

A 3) En lisant l'arbre du 1b on a $P(G) = 0,4 \times 0,08 + 0,6 \times p_1$. Donc on a $0,2 = 0,032 + 0,6 \times p_1$ soit $p_1 = \dfrac{0,168}{0,6} = 0,28$. On en déduit $p_2 = 1 - p_1 = 0,72$
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

B 1) Il n'y a que 2 possibilités de résultat à chaque expérience individuelle ; vacciné ou non vacciné. De plus, le fait qu'une personne soit vaccinée est indépendante du fait qu'une autre le soit (ou pas). X suit donc une loi binomiale dont le paramètre est $p = 0,4$
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

B 2a) Calcul de $P(X = 15)$. Je ne pense pas que les correcteurs exigent d'utiliser la formule $P(X = 15) = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times 0,6^{25} \simeq 0.1228$ environ. Donc direction la calculatrice. Pour une TI par exemple on tapera :
binomFdP
nbreEssais:40
p: 0,4
valeur de x: 15
Sur une Casio : STAT $\Rightarrow$ DIST $\Rightarrow$ BINM : **BinomialPD(15,40,0.4)**
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

B 2b) Calcul de $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19)$. Pour ce calcul, il n'y a pas de formule toute faite à moins de faire à la main la somme de tous les $P(X = k)$ pour k allant de 0 à 19 inclu, donc là encore, pas de scrupule à utiliser la calculatrice. Pour une TI par exemple on tapera :
binomFRep
nbreEssais:40
p: 0,4
valeur de x: 19
Sur une Casio : STAT $\Rightarrow$ DIST $\Rightarrow$ BINM : **BinomialCD(19,40,0.4)**
Ce qui donne environ $0,8702$ et donc la probabilité qu'au moins la moitié des personnes soient vaccinées est environ de $1 - 0,8702 = 0,1298$.
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

B 3) Calcul classique pour se ramener à une loi normale centrée ($\mu = 0$) et réduite ($\sigma = 1$): on écrit que $P(1450 \leq X \leq 1550) = P(\frac{1450 - 1500}{30} \leq \frac{X - 1500}{30} \leq \frac{1550 - 1500}{30}) = P(-\frac{5}{3} \leq Z \leq \frac{5}{3})$. Cette dernière probabilité correspond donc à une loi normale centrée et réduite. Direction donc la TI (ou Casio ou autre) en prenant $\frac{5}{3} \simeq 1,6666$:
normFrep
borne inf: -1,6666
borne sup: 1,6666
μ**:**0
σ**:**1
Sur une Casio : STAT $\Rightarrow$ DIST $\Rightarrow$ NORM : **NormCD(-1,6666,1,6666,1,0)**
On obtient alors $P(1450 \leq X \leq 1550) \simeq 0,9044$
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

Exercice 3

A 1a) La hauteur issue de E est la droite passant par E et perpendiculaire à la face opposée (ABC), il s'agit donc de la droite (EA). La hauteur issue de C est la droite passant par C et perpendiculaire à la face opposée (EAB), il s'agit donc de la droite (BC).
Connaissances requises $3^e/2^{nde}$*. Difficulté : très facile.*

A 1b) (BC) et (EA) ne se coupent pas et sont des hauteurs du tétraèdre, donc les 4 hauteurs ne sont pas concourrantes.
Connaissances requises $3^e/2^{nde}$*. Difficulté : très facile.*

A 2a) Notons $ax + by + cz + d$ l'équation du plan (ACH). Le point $A(0; 0; 0)$ doit vérifier l'équation, ce qui donne $d = 0$. Le point $C(1; 1; 0)$ doit vérifier l'équation, ce qui donne $a + b = 0$. Le point $H(0; 1; 1)$ doit vérifier l'équation, ce qui donne $b + c = 0$. Si on choisit de prendre $c = 1$ alors on déduit de l'égalité précédente $b = -c = -1$ puis que $a = -b = 1$. $x - y + z = 0$ est donc bien une équation du plan (ACH).
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne voire facile.

A 2b) On sait que les coefficients a b et c du plan (ACH) donnent les coordonnées d'un vecteur $\vec{n} = (a; b; c)$ perpendiculaire (on dit aussi normal) au plan. D'autre part les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ sont $(1; 0; 1) - (0; 1; 0) = (1; -1; 1)$ qui est justement égal à $\vec{n}$ (si on avait choisi $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ on n'aurait pas égalité mais l'important est qu'ils soient colinéaires). Donc la doite (DF) est bien perpendiculaire au plan (ACH), par conséquent il s'agit bien de la hauteur issue de F du tétraèdre $ACHF$.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne à difficile.

A 2c) La figure représentant un cube, par symétrie de cette figure on a donc que la hauteur issue d'un des sommets du tétraèdre est à chaque fois la grande diagonale du cube issue de ce point, donc (CE) est la hauteur issue de E, (AG) est la hauteur issue de A et (HB) est la hauteur issue de B.
Comme ces hauteurs sont des grandes diagonales du cube, elles se coupent donc toutes au centre du cube et sont donc concourrantes.
Connaissances requises TS. Difficulté : difficile.

B 1a) (PQ) appartient au plan (NPQ) qui par hypothèse est perpendiculaire à la hauteur (MK), donc (MK) est perpendiculaire à (PQ). Même raisonnement pour (NK) qui est aussi perpendiculaire à (PQ).
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

B 1b) Les 2 droites sécantes (par hypothèse) (MK) et (NK) sont distinctes, elles sont donc dans un unique plan (MKN). D'après le 1a, (PQ) est perpendiculaire à ces 2 droites de ce plan (droites qui sont non parallèles) donc (PQ) est perpendiculaire au plan (MKN).
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

B 2) La droite (MN) est dans le plan (MKN) qui, d'après le 1b, est perpendiculaire à (PQ), donc les arêtes [MN] et [PQ] sont bien orthogonales.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

C) On calcule les coordonnées des vecteurs des 6 arêtes. Les arêtes opposées devront être orthogonales (3 couples d'arêtes possibles), ce qu'on peut vérifier en faisant le produit scalaire de ces vecteurs:
$\overrightarrow{\mathrm{RS}}(4; -1; -4)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{TU}}(0; 8; -2)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{RS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{TU}} = 4 \times 0 + (-1) \times 8 + (-4) \times (-2) = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{ST}}(3; -5; 7)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{RU}}(7; 2; 1)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{ST}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RU}} = 3 \times 7 + (-5) \times 2 + 7 \times 1 = 18$

$\overrightarrow{\mathrm{RT}}(7; -6; 3)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{SU}}(3; 3; 5)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{RT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SU}} = 7 \times 3 + (-6) \times 3 + 3 \times 5 = 18$

Au moins 2 arêtes opposées ne sont pas orthogonales donc le tétraèdre proposé n'est pas orthocentrique.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

Exercice 4 (spé)

A 1) On cherche dans les plus petites valeurs possibles en commencant par y car le facteur 8 laisse penser que x sera plus grand que y. On tombe facilement sur les nombres $x = 1$ et $y = 0$ ou bien $x = 3$ et $y = 1$.
Connaissances requises 4^e. *Difficulté : très facile.*

A 2a) L'initialisation de la récurrence permet de répondre a posteriori à la question 1 ce qui la rend d'autant plus facile. Le couple $(1; 0)$ est bien solution de l'équation (E) (vu au 1).
Soit maintenant un entier naturel n quelconque. Supposons que (x_n, y_n) soit solution de (E). Dans ce cas comme on a $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$ et $y_{n+1} = x_n + 3y_n$ on a :

$$x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = (3x_n + 8y_n)^2 - 8(x_n + 3y_n)^2 = 9x_n^2 + 64y_n^2 + 12x_ny_n - 8(x_n^2 + 9y_n^2 + 6x_ny_n) = x_n^2 - 8y_n^2$$

L'hypothèse de récurrence permet donc d'affirmer qu'on a donc aussi $x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = 0$ et par conséquent que (x_{n+1}, y_{n+1}) est solution de (E), ce qui termine la preuve par récurrence.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

A 2b) Comme $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$, $x_{n+1} - x_n = 2x_n + 8y_n > 0$ car x_n et y_n sont des entiers naturels donc positifs et comme on suppose x_n non nul,on a donc $x_{n+1} - x_n > 0$ ou encore $x_{n+1} > x_n$.
Si on a zappé que les entiers sont supposés naturels donc positifs on peut toujours démontrer par récurrence que $y_n \geq 0$ pour tout entier n. C'est vrai en effet pour $n = 0$ car $y_0 = 0$, et si on suppose que pour un entier n quelconque fixé on a $y_n \geq 0$, alors du fait que $y_{n+1} = x_n + 3y_n$ et que $x_n > 0$ on a bien $y_{n+1} \geq 0$ ce qui termine la récurrence. On aurait pu d'ailleurs démontrer directement par récurrence que pour tout entier n on a $x_n > 0$ et $y_n \geq 0$ ce qui ne demandait guère plus d'effort et évitait d'avoir à faire l'hypothèse $x_n > 0$, mais bon..... En réalité l'énoncé fait l'hypothèse que la suite est bien définie, à savoir que la relation de récurrence donnée pour $(x_n; y_n)$ permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, x_n et y_n sont bien des entiers naturels. C'est presque évident mais il n'empèche que l'énoncé fait l'impasse sur cette précision.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

A 3) D'après le 2a la suite $(x_n; y_n)$ est formée de couples de solutions de (E). Comme de plus, d'après le 2b nous savons que $x_{n+1} > x_n$, ces couples sont tous distincts 2 à 2 et il y en a donc une infinité.
Connaissances requises $2^{nde}/1^{ere}$ *(savoir ce qu'est une suite). Difficulté : facile.*

B 1) On trouve assez facilement que les entiers 8 et 9 conviennent car 8 n'a comme diviseur premier que 2 et $2^2 = 4$ divise bien 8, et pour 9 on n'a bien que 3 comme diviseur premier et $3^2 = 9$ divise bien 9.
Connaissances requises 3^e. *Difficulté : facile.*

B 2) Soit $n = a^2b^3$. Si p est un nombre premier divisant n, il est soit dans la décomposition en facteurs premiers de a^2 soit dans celle de b^3 (ou dans les 2), donc aussi dans celle de a ou dans celle de b. S'il est dans celle de a, p^2 sera un diviseur de a^2 et donc de n. S'il est dans celle de b, p^2 sera un diviseur de b^2 donc aussi de b^3 et donc de n.
Connaissances requises 3^e. *Difficulté : moyenne.*

B 3) x^2 est toujours un nombre puissant car il s'écrit $x^2 \times 1^3$ et on applique la question 2. Comme (x, y) est solution de (E) on a $x^2 - 1 = 8y^2 = y^2 \times 2^3$ et on peut appliquer encore la question 2. x^2 et $x^2 - 1$ sont consécutifs car ils différent de 1, et sont donc puissants tous les deux.
Connaissances requises 3^e. *Difficulté : moyenne.*

B 4) A la question 3 de la partie A on a montré qu'il existe une infinité de couples de solutions de (E), et pour tous ces couples les x_n sont 2 à 2 distincts. On a donc une infinité d'entiers consécutifs x_n^2 et $x_n^2 - 1$ qui sont puissants.
En appliquant successivement la rêgle de récurrence de la suite $(x_n; y_n)$ on peut facilement calculer les premiers couples de valeurs, jusqu'à ce que x_n^2 dépasse 2018 ce qui arrive assez vite. Ces couples sont $(1; 0)$, $(3; 1)$, $(17; 6)$ $(99; 25)$. Comme $99^2 = 9801$ on s'arrête là et les nombres cherchés sont donc $x_3^2 = 9801$ et $x_3^2 - 1 = 9800$.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

zeta1859 at gmail, 29/06/2018