

Corrigé du bac 2018 : Mathématiques Spécialité Série S – Polynésie

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

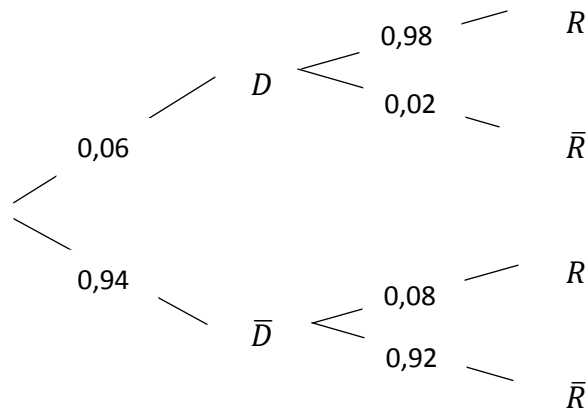
Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site

www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. Arbre de probabilités :



D'après la formule des probabilités totales :

$$p(R) = p(D \cap R) + p(\bar{D} \cap R)$$
$$p(R) = 0,6 \times 0,98 + 0,94 \times 0,08 = 0,134$$

La probabilité que le DVD soit retiré du stock est bien de 13,4%.

2. On cherche $p_R(D)$. Pour cela on utilise la formule suivante :

$$p_R(D) = \frac{p(D \cap R)}{p(R)}$$
$$p_R(D) = \frac{0,06 \times 0,98}{0,134} \approx 0,44$$

Or $0,44 < 0,50$, ce qui nous amène à dire que l'affirmation est fautive. Parmi les DVD retirés, environ 44% sont des DVD défectueux.

Partie B

Pour savoir si on peut accepter ou rejeter l'hypothèse, il faut calculer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

On sait que $n = 150$, $p = 0,06$ et $1 - p = 0,94$.

On vérifie que $n \geq 30$, $np = 9 \geq 5$ et $n(1 - p) = 141 \geq 5$.

$$I_{150} = \left[0,06 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{150}} ; 0,06 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{150}} \right]$$

$$I_{150} \approx [0,021 ; 0,099]$$

De plus, $f = \frac{14}{150} \approx 0,093$ donc $f \in I_{150}$. Par conséquent, l'hypothèse doit être acceptée : dans cette médiathèque, 6% des DVD sont défectueux.

Partie C

1. On suppose Z la variable centrée réduite de X . Autrement dit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$p(X \geq 92) = 0,1$$

$$p(X - 80 \geq 92 - 80) = 0,1$$

$$p\left(\frac{X - 80}{\sigma} \geq \frac{12}{\sigma}\right) = 0,1$$

$$p\left(\frac{X - 80}{\sigma} \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 1 - 0,1$$

$$p\left(Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0,9$$

A l'aide de la calculatrice, on trouve : STAT → DIST → NORM → InvN → InvN(0,9, 0, 1)

$$\frac{12}{\sigma} \approx 1,282$$

$$\sigma \approx \frac{12}{1,282} \approx 9,36$$

On trouve un écart type de 9,36 pour la variable X . Donc X suit une loi normale :

$$X \rightarrow \mathcal{N}(80 ; 9,36).$$

2. On sait que 1h30 représente 90 minutes et 1h35 représente 95 minutes. On cherche :

$$p_{X \geq 90}(X \leq 95) = \frac{p(90 \leq X \leq 95)}{p(X \geq 90)}$$

Or $X \rightarrow \mathcal{N}(80 ; 9,36)$ donc $p(X \geq 90) = 0,5 - p(80 \leq X \leq 90)$

$$p_{X \geq 90}(X \leq 95) = \frac{p(90 \leq X \leq 95)}{0,5 - p(80 \leq X \leq 90)}$$

A l'aide de la calculatrice on obtient :

$$\text{STAT} \rightarrow \text{DIST} \rightarrow \text{NORM} \rightarrow \text{Ncd} \rightarrow \text{NormCD}(90, 95, 9,36, 80) \approx 0,0882$$

$$\text{STAT} \rightarrow \text{DIST} \rightarrow \text{NORM} \rightarrow \text{Ncd} \rightarrow \text{NormCD}(80, 90, 9,36, 80) \approx 0,3573$$

$$p_{X \geq 90}(X \leq 95) = \frac{0,0882}{0,5 - 0,3573} \approx 0,6181$$

La probabilité que le film se termine avant 1h35 alors qu'il a déjà été vu 1h30 est approximativement de 62,81 %.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A – Modélisation de la forme de l'ampoule

1.a) On sait que $\sin(x)' = \cos(x)$. Donc :

$$f'(x) = b \times \frac{\pi}{4} \cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$$

1.b) On remarque que la tangente au point B de coordonnées $(0; 1)$ est parallèle à l'axe des abscisses, autrement dit $f'(0) = 0$.

De plus $f'(x) = b \times \frac{\pi}{4} \cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$ alors $f'(0) = b \times \frac{\pi}{4} \cos(c) = 0$. Or cette équation peut être résolue uniquement si $c = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On sait également que $c \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $c = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent $f(x) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)$.

2. A partir du point B , on a $f(0) = 1$, on obtient :

$$f(0) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right) = 1$$

$$a + b \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$a + b = 1$$

A partir du point C , on a $f(4) = 3$, on obtient :

$$f(4) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \times 4\right) = 3$$

$$a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = 3$$

$$a + b \times (-1) = 3$$

$$a - b = 3$$

On résout le système qui suit :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 3 \end{cases}$$

Par addition : $2a = 4$

$$a = 2$$

Conclusion, si $a = 2$ alors $b = -1$.

Partie B – Approximation du volume de l'ampoule

1. Le volume d'un cylindre se calcule à partir de la formule suivante : $V_c = \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$.

Ici, le rayon $OB = 1$, et la hauteur $AB = 1$ par conséquent $V_C = \pi$.

Le volume du cylindre de section le rectangle $ABFG$ est de π unité de volume.

2. Le volume d'une sphère se calcule à partir de la formule suivante : $V_S = \frac{4}{3}\pi R^3$, par conséquent, on en déduit le volume d'une demi-sphère : $V'_S = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3$.

Ici, le rayon noté $R = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2} \times 6 = 3$.

$$V'_S = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 18\pi.$$

Le volume de la demi-sphère est de 18π unités de volume.

3.a) Cas particulier

La fonction f permet de calculer le rayon, on cherche donc $f\left(2 \times \frac{4}{5}\right) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{8}{5}\right) \approx 1,691$.

$$\text{Donc } V_3 = \pi \times 1,691^2 \times \frac{4}{5} = \frac{16\pi}{5} \approx 7,187.$$

Le volume du troisième cylindre est de 7,187 unités de volume.

3.b) Cas général

$V \leftarrow 0$

Pour k allant de 0 à $n - 1$:

$$| V \leftarrow V + \pi \times \left(2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} \times k \times \frac{4}{n}\right)\right)^2 \times \frac{4}{n}$$

Fin Pour

EXERCICE 3 (4 points)

1. Les primitives de $f(x)$ sont : $F(x) = -e^{-kx} + K$ avec K une constante quelconque. Une primitive particulière est : $F(x) = -e^{-kx}$.

2. On a $BC = f(1) = ke^{-k}$. Par conséquent, l'aire du triangle OBC est $A_1 = \frac{ke^{-k}}{2}$.

Donc :

$$\begin{aligned} A_D &= \int_0^1 f(x)dx - A_1 \\ A_D &= F(1) - F(0) - \frac{ke^{-k}}{2} \\ A_D &= 1 - e^{-k} - \frac{ke^{-k}}{2} \\ A_D &= 1 - \frac{(2+k)e^{-k}}{2} \end{aligned}$$

L'aire du domaine \mathcal{D} est de $1 - \frac{(2+k)e^{-k}}{2}$.

3. On cherche :

$$1 - \frac{(2+k)e^{-k}}{2} = ke^{-k}$$

$$1 - e^{-k} - \frac{ke^{-k}}{2} = ke^{-k}$$

$$1 - e^{-k} - \frac{3ke^{-k}}{2} = 0$$

Pour faciliter les calculs, nous allons nommer cette fonction $g(k) = 1 - e^{-k} - \frac{3ke^{-k}}{2}$.

Nous allons calculer la dérivée afin de pouvoir construire un tableau de signe et par la suite un tableau de variations.

$$g'(k) = e^{-k} - \frac{3}{2}e^{-k} + \frac{3k}{2}e^{-k}$$

$$g'(k) = e^{-k} \times \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{3k}{2}\right)$$

$$g'(k) = e^{-k} \times \left(\frac{-1+3k}{2}\right)$$

Il nous faut résoudre : $g'(k) = 0$.

$$e^{-k} \times \left(\frac{-1+3k}{2}\right) = 0$$

Un produit est nul, si un des deux facteurs est nul, or $e^{-k} > 0$.

$$\text{Donc } \left(\frac{-1+3k}{2}\right) = 0$$

Un quotient est nul si le numérateur est nul.

$$-1 + 3k = 0$$

$$k = \frac{1}{3}$$

On obtient le tableau de variation suivant avec les calculs ci-dessous :

k	0	$k = \frac{1}{3}$	$+\infty$
Signe de $g'(k)$	-	0	+
Variation de $g(k)$	0	$g(1/3) \approx -0,07$	1

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} g(k) = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g(k) = 1 \text{ car } \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-k} = 0$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{3}} - \frac{3 \times \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}}}{2} \approx -0,07$$

On a une fonction $g(k)$ continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$.

De plus, $g\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0,07$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(k) = 1$

L'équation $g(k) = 0$ possède donc une unique solution sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Par conséquent, il existe une solution unique qui permet de dire qu'il y a un réel k qui permet que l'aire du domaine \mathcal{D} soit le double de l'aire du triangle OCB .

EXERCICE 4 spé (5 points)

Partie A – Etude d'un premier milieu

1. $a_1 = 0,995a_0 + 0,6b_0 = 0,995 \times 1 + 0,6 \times 0 = 0,995$

$$b_1 = 1 - a_1 = 1 - 0,995 = 0,005$$

$$a_2 = 0,995a_1 + 0,6b_1 = 0,995 \times 0,995 + 0,6 \times 0,005 = 0,993025$$

$$b_2 = 1 - a_2 = 1 - 0,993025 = 0,006975$$

2.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n A \\ (a_{n+1} \quad b_{n+1}) &= (a_n \quad b_n) \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \\ \text{car } a_{n+1} &= 0,995a_n + 0,6b_n \\ \text{et } b_{n+1} &= 0,005a_n + 0,4b_n \end{aligned}$$

3.

$$P^{-1}A = \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -0,395 & 0,395 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D = \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -0,395 & 0,395 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,395 \end{pmatrix}$$

4. Démonstration par récurrence :

- Initialisation

Pour $n = 0$, $A^0 = PD^0P^{-1} = I_2$ avec I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

- Hérédité

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

$$A^{n+1} = A \times A^n$$

$$A^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1}$$

$$A^{n+1} = PDID^nP^{-1}$$

$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

- Conclusion

On peut donc conclure que pour tout n entier naturel, alors : $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. On a : $X_n = X_0 A^n = \frac{1}{121} (120 + 0,395^n \quad 1 - 0,395^n)$ ce qui nous donne $a_n = \frac{120 + 0,395^n}{121}$.

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{120}{121}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,395^n = 0$ puisque $0 \in]-1; 1[$.

L'atome tend vers un état stable de $\frac{120}{121}$.

Partie B – Etude d'un second milieu

1. On obtient :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,99a_n + \alpha b_n \\ b_{n+1} = 0,01a_n + (1 - \alpha)b_n \end{cases}$$

D'où :

$$M = \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ \alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

2. Par conséquent :

$$\begin{aligned} X &= XM \\ \begin{cases} 0,98 = 0,98 \times 0,99 + 0,02\alpha \\ 0,02 = 0,98 \times 0,01 + 0,02(1 - \alpha) \end{cases} \\ \begin{cases} 0,98 = 0,9702 + 0,02\alpha & (1) \\ 0,02 = 0,0098 + 0,02 - 0,02\alpha & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Dans (1) :

$$0,98 = 0,9702 + 0,02\alpha$$

$$0,0098 = 0,02\alpha$$

$$\alpha = 0,49$$

Vérification avec (2) :

$$0,02 = 0,0098 + 0,02 - 0,02\alpha$$

$$0,0098 = 0,02\alpha$$

$$\alpha = 0,49$$