Corrigé du bac 2018 : Mathématiques Spécialité Série S – Pondichéry

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la règlementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A

1. $T_0 = 1000$
$T_1 = 0{,}82 \times 1000 + 3{,}6 = 823{,}6$
$T_2 = 0{,}82 \times 823{,}6 + 3{,}6 = 678{,}952$
$T_3 = 0{,}82 \times 678{,}952 + 3{,}6 = 560{,}34064$
$T_4 = 0{,}82 \times 560{,}34064 + 3{,}6 \approx 463{,}079$
Au bout de 4 heures de refroidissement, le four sera à $463{,}1°C$.

2. Démonstration par récurrence :

- Initialisation

$T_0 = 0{,}82^0 \times 980 + 20 = 1000$

La propriété est vraie au rang 0.

- Hérédité

On suppose que $T_n = 0{,}82^n \times 980 + 20$
Alors, $T_{n+1} = 0{,}82 \times T_n + 3{,}6$
$= 0{,}82^{n+1} \times 980 + 0{,}82 \times 20 + 3{,}6$
$= 0{,}82^{n+1} \times 980 + 20$

- Conclusion

On peut donc conclure que pour tout n entier naturel, alors : $T_n = 0{,}82^n \times 980 + 20$

3.
$$T_n = 0{,}82^n \times 980 + 20 \leq 70$$
$$0{,}82^n \times 980 \leq 50$$
$$0{,}82^n \leq \frac{5}{98}$$
$$n \ln 0{,}82 \leq \ln \frac{5}{98}$$
$$n = \frac{\ln \frac{5}{98}}{\ln 0{,}82} \approx 14{,}99$$
Pour ouvrir le four sans risque pour la céramique, il faut attendre approximativement 15 heures.

Partie B

1.
$$f'(t) = -\frac{a}{5} e^{-\frac{t}{5}}$$
$$f'(0) = -\frac{a}{5}$$
$$f'(0) + \frac{1}{5} f(0) = -\frac{a}{5} + \frac{1}{5} \times 1000 = 4$$
$$\text{Donc } a = -5 \times \left(4 - \frac{1000}{5}\right) = 5 \times 196 = 980$$

$$\text{Par ailleurs } f(0) = a + b = 1000$$
$$\text{Donc } b = 1000 - a = 1000 - 980 = 20$$

A l'aide des données nous avons pu déterminer que $a = 980$ et $b = 20$.

2.a)

$$\lim_{t \to +\infty} -\frac{t}{5} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{5}} = 0$$
$$\text{Et donc } \lim_{t \to +\infty} 980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20 = 20$$

2.b) $f'(t) = -\frac{980}{5} e^{-\frac{t}{5}} = -196\, e^{-\frac{t}{5}} < 0$ car $e^x > 0$

Par conséquent :

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(t)$	$1000 \searrow 20$

La fonction $f(t)$ est strictement décroissante.

2.c)

$$f(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} + 20 \leq 70$$
$$980e^{-\frac{t}{5}} \leq 50$$
$$e^{-\frac{t}{5}} \leq \frac{5}{98}$$
$$-\frac{t}{5} \leq \ln\frac{5}{98}$$
$$t \geq -5\ln\frac{5}{98} = 14{,}878$$

Car la division ou la multiplication par un nombre négatif change le sens de l'inégalité

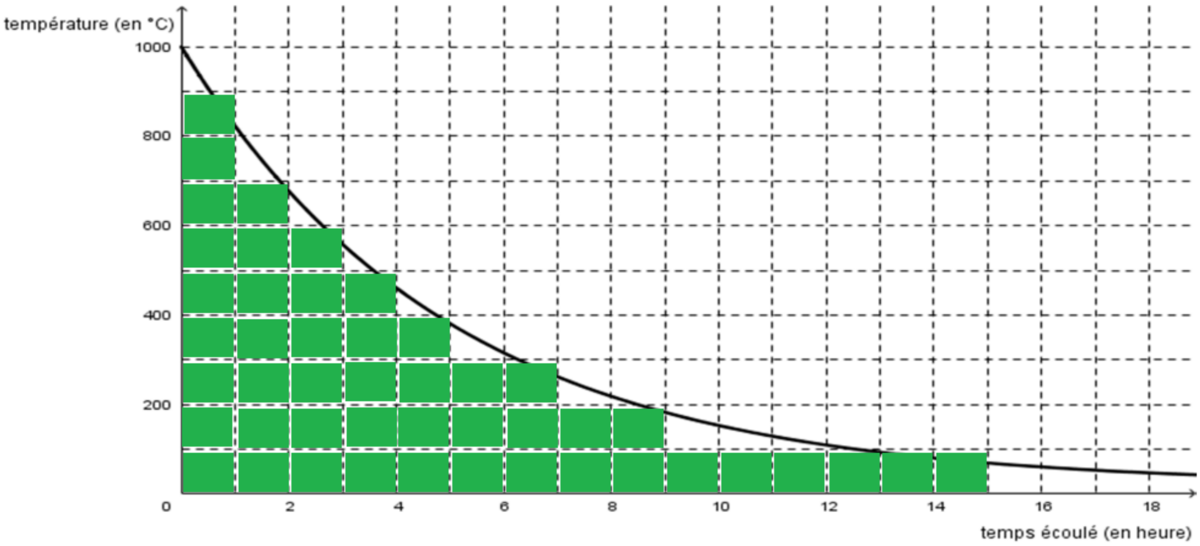
Or $60t \geq 892{,}66$

Donc le four peut être ouvert sans risque aux alentours de 893 minutes, soit 14 heures et 53 minutes.

3.a) On cherche à résoudre :

$$\frac{1}{15-0}\int_0^{15} f(t)dt$$

On va donc chercher l'aire sous la courbe entre 0 et 15, et par la suite le diviser par 15.



Sous la courbe on observe environ 47 carreaux, chaque carreau représente $1 \times 100 = 100$. Par conséquent :

$$\int_0^{15} f(t)dt \approx 47 * 100 = 4700$$

$$\frac{1}{15}\int_0^{15} f(t)dt \approx \frac{4700}{15} \approx 313$$

La température moyenne est approximativement de 313°C.

3.b)

$$\begin{aligned}\frac{1}{15}\int_0^{15} f(t)dt &= \frac{1}{15}\int_0^{15}\left(980e^{-\frac{t}{5}}+20\right)dt \\ &= \frac{1}{15}\left[980\times(-5)e^{-\frac{t}{5}}+20t\right]_0^{15} \\ &= \frac{1}{15}\left[-4900e^{-\frac{t}{5}}+20t\right]_0^{15} \\ &= \frac{1}{15}(-4900(e^{-3}-1)+20\times 15) \\ &\approx 330{,}4\end{aligned}$$

En arrondissant à l'unité près, la température moyenne est de 330°C.

4.a)

$$\begin{aligned}d(t) &= f(t)-f(t+1) \\ &= 980e^{-\frac{t}{5}}+20-\left(980e^{-\frac{t+1}{5}}+20\right) \\ &= 980\times\left(e^{-\frac{t}{5}}-e^{-\frac{t}{5}}e^{-\frac{1}{5}}\right) \\ &= 980e^{-\frac{t}{5}}\times\left(1-e^{-\frac{1}{5}}\right)\end{aligned}$$

4.b) $\lim\limits_{t\to+\infty} d(t) = 0$ car $\lim\limits_{u\to+\infty} e^{-u} = \lim\limits_{u\to-\infty} e^{u} = 0$

L'écart de température entre les heures va diminuer progressivement jusqu'à disparaitre (puisque égale à 0). Ce qui signifie que la température du four va se stabiliser.

EXERCICE 2 (4 points)

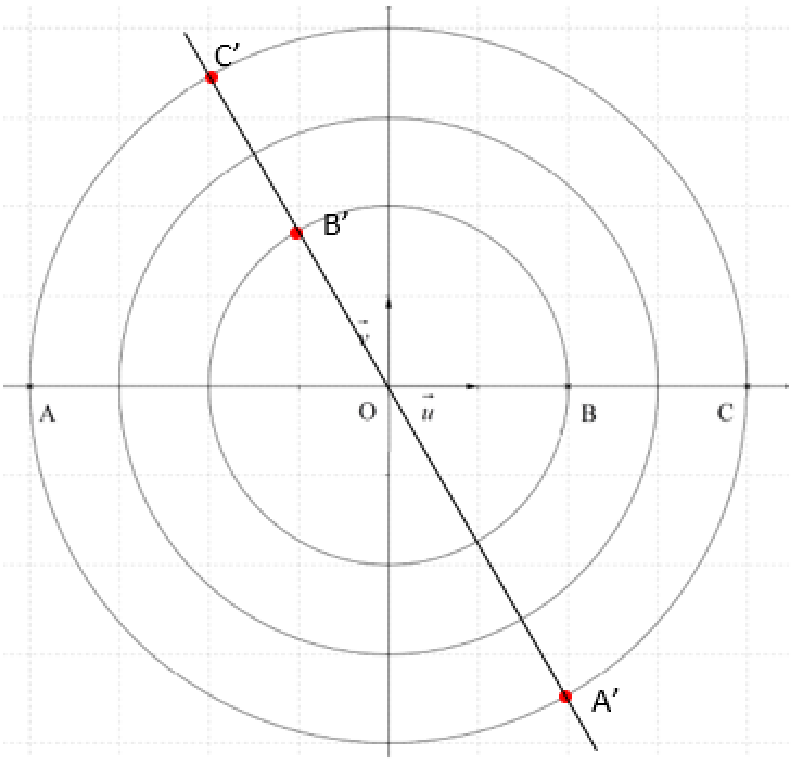
1.a) On a $|j| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

Donc $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

On en déduit a', b' et c' :

$$a' = ja = -4e^{\frac{2i\pi}{3}} = 4e^{\frac{5i\pi}{3}} = 2 - 2i\sqrt{3}$$
$$b' = jb = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$$
$$c' = jc = 4e^{\frac{2i\pi}{3}} = -2 + 2i\sqrt{3}$$

1.b)



2. A, B, et C sont alignés sur l'axe des abscisses, $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}$ réel. De plus :

$$\frac{z_{\overrightarrow{A'B'}}}{z_{\overrightarrow{A'C'}}} = \frac{b' - a'}{c' - a'} = \frac{j(b-a)}{j(c-a)} = \frac{b-a}{c-a} = \frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}$$

$\frac{z_{\overrightarrow{A'B'}}}{z_{\overrightarrow{A'C'}}}$ est également un réel.
Par conséquent on peut conclure que A', B' et C' sont alignés.

3. Puisque MNP est isocèle on cherche à démontrer qu'il a 2 côtés de même taille.
P est le milieu de $[AC']$: $p = \frac{a+c'}{2} = \frac{-4+4j}{2} = -2 + 2j$
M est le milieu de $[A'C]$: $m = \frac{a'+c}{2} = \frac{4-4j}{2} = 2 - 2j$
N est le milieu de $[CC']$: $n = \frac{c+c'}{2} = \frac{4+4j}{2} = 2 + 2j$
$PN = |p - n| = |-2 + 2j - (2 + 2j)| = |4j - 4|$
$NM = |n - m| = |2 + 2j - (2 - 2j)| = |4j - 4|$
$PN = NM$, le triangle MNP est bien un triangle isocèle en N.

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A

1.a) Calculatrice Casio 35+ : STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(0\ ,\ 0{,}2\ ,0{,}21, 0{,}58)$
$p(X_U < 0{,}2) \approx 0{,}035$

De même : STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(0{,}5\ ,\ 0{,}8\ ,\ 0{,}21\ ,0{,}58)$
$p(0{,}5 \leq X_u < 0{,}8) \approx 0{,}501$

1.b) $1800 \times 0{,}035 \approx 63$. Les différents tamis permettent de récupérer 63g de sucre extra fin.
$1800 \times 0{,}501 \approx 901{,}8$. Il y a 901,8 grammes de sucre sur le tamis 2.

2.

$$p(0{,}5 < X_V < 0{,}8) = 0{,}4$$
$$p\left(-\frac{0{,}15}{\sigma_V} < \frac{X_V - 0{,}65}{\sigma_V} < \frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 0{,}4$$
$$p\left(\frac{X_V - 0{,}65}{\sigma_V} \leq -\frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 0{,}3$$
$$p\left(\frac{X_V - 0{,}65}{\sigma_V} \leq \frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 0{,}7$$

La calculatrice nous donne $\frac{0{,}15}{\sigma_V} \approx 0{,}5244$
Donc $\sigma_V \approx 0{,}286$
Et donc $V \sim N(0{,}65\,,0{,}286^2)$

Partie B

1.a) D'après la formule de probabilité totale :

$$P(E) = P(U)P_U(E) + P(V)P_V(E)$$
$$P(E) = 0{,}3 \times 0{,}03 + 0{,}7 \times 0{,}05 = 0{,}044$$

Il y a 4,4% de chance que le paquet porte le label sucre « extra fin ».

1.b)

$$P_E(U) = \frac{P(U \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}009}{0{,}044} \approx 0{,}205$$

Sachant que le paquet porte le label sucre « extra fin », il y a 20,5% que ce sucre viennent de l'exploitation U.

2. On appelle u comme la proportion de paquet venant de l'exploitation U.

$$\text{On sait que } P(E) = u \times 0{,}03 + (1-u) \times 0{,}05 = 0{,}05 - 0{,}02u$$
$$\text{Donc } P_E(U) = \frac{0{,}03u}{P(E)} = \frac{0{,}03u}{0{,}05-0{,}02u} = 0{,}3$$
$$0{,}03u = 0{,}015 - 0{,}006u$$
$$0{,}036u = 0{,}015$$
$$u = \frac{0{,}015}{0{,}036} \approx 0{,}417$$

Pour avoir 30% de paquet de sucre label « extra fin », il faudrait 41,7% de paquets de l'exploitation U. Et par conséquent 59,3% de paquet de l'exploitation V.

Partie C

1. $n = 150, p = 0{,}3$
Intervalle de fluctuations asymptotique de paquet provenant de l'exploitation U :

$$\left[0{,}3 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}3 \times 0{,}7}}{\sqrt{150}} ; 0{,}3 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}3 \times 0{,}7}}{\sqrt{150}}\right] \approx [0{,}23; 0{,}37]$$
$$f = \frac{30}{150} = 0{,}2$$

La fréquence f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuations, par conséquent l'acheteur a raison de remettre en cause l'annonce de l'entreprise.

2. $n = 150$, $f = 0{,}42$

Intervalle de confiance de la proportion de paquets provenant de l'exploitation U :

$$\left[0{,}42 - \frac{1}{\sqrt{150}}\,;0{,}42 + \frac{1}{\sqrt{150}}\right] \approx [0{,}338; 0{,}502]$$

EXERCICE 4 spé (5 points)

Partie A

1. Pour coder la lettre « N » : $x = 13$

$y \equiv x(x + 13)\ \ [33]$ avec $0 \leq y \leq n$

$y \equiv 13(13 + 13)\ \ [33]$

$y \equiv 338\ \ [33]$

Or $338 = 33 \times 10 + 8$

$y \equiv 8\ \ [33]$

La lettre « N » est codée par le nombre 8.

2. Pour coder la lettre « O » : $x = 14$

$y \equiv x(x + 13)\ \ [33]$ avec $0 \leq y \leq n$

$y \equiv 14(14 + 13)\ \ [33]$

$y \equiv 378\ \ [33]$

Or $338 = 33 \times 11 + 15$

$y \equiv 15\ \ [33]$

La lettre « O » est codée par le nombre 15.

Partie B

1.

$$\begin{gathered}(x + 23)^2 \equiv 4\ [33] \\ x^2 + 46x + 529 \equiv 4\ \ [33] \\ x^2 + 46x \equiv -525\ \ [33] \\ x^2 + 13x \equiv 3\ \ [33] \\ x(x + 13) \equiv 3\ \ [33]\end{gathered}$$

2.a) Si $(x + 23)^2 \equiv 4\ [33]$ alors $(x + 23)^2 = 4 + 33k$ avec k un nombre relatif. Or $33 = 11 \times 3$, par conséquent :

$$\begin{cases} (x + 23)^2 = 4 + 3 \times 11k \equiv 4\ \ [3] \\ (x + 23)^2 = 4 + 11 \times 3k \equiv 4\ \ [11] \end{cases}$$

2.b) $(x+23)^2 - 4 = 3k = 11k'$
3 et 11 sont des nombres premiers, c'est pourquoi d'après le théorème de Gauss, 11 divise k ou bien k est un multiple de 11.
$(x = 23)^2 - 4 = 33k''$

2.c)

$$x(x+13) \equiv 3 \ [33]$$
$$(x+23)^2 \equiv 4 \ [33]$$
$$(x+23)^2 - 4 \equiv 0 \ [3] \text{ et } (x+23)^2 - 4 \equiv 0 \ [11]$$
$$\begin{cases} (x+23)^2 \equiv 1 \ [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 \ [11] \end{cases}$$

3. a) $a^2 = 0^2 \equiv 0 \ [3]$
$a^2 = 1^2 \equiv 1 \ [3]$
$a^2 = 2^2 \equiv 1 \ [3]$
Pour que $a^2 \equiv 1 \ [3]$ il faut soit $a = 1$ ou $a = 2$ si $a < 3$

3.b)

$\boldsymbol{b}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{b^2}$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$\boldsymbol{b^2\ [11]}$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

Pour que $b^2 \equiv 4 \ [11]$, il faut soit $b = 2$ ou $b = 9$.

4.a) On sait que $(x+23)^2 \equiv 1 \ [3]$ par conséquent :

$$x + 23 \equiv 1 \ [3]$$
$$x + 2 \equiv 1 \ [3]$$
$$x \equiv 2 \ [3]$$

Ou $x + 23 \equiv 2 \ [3]$
$$x + 2 \equiv 2 \ [3]$$
$$x \equiv 0 \ [3]$$

On sait que $(x+23)^2 \equiv 4 \ [11]$ par conséquent :

$$x + 23 \equiv 2 \ [11]$$
$$x + 1 \equiv 2 \ [11]$$
$$x \equiv 1 \ [11]$$

$$\text{Ou } x + 23 \equiv 9 \ [11]$$
$$x + 1 \equiv 9 \ [11]$$
$$x \equiv 8 \ [11]$$

En croisant les résultats précédents on obtient :

$$\begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases}$$

4.b)

$$\begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases} \Rightarrow x = 23$$

$$\begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases} \Rightarrow x = 8$$

$$\begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases} \Rightarrow x = 12$$

$$\begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases} \Rightarrow x = 30$$

5.

```
Pour x allant de 0 à 32
        Si le reste de la division de x * (x + 13) par 33 est égale à 3 alors
              Afficher x
        Fin Si
Fin Pour
```

6. Non, il existe 3 solutions I, X ou M. Il faut chercher à comprendre le mot dans sa globalité pour décoder ce type de codage.