BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2018

Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	Série **: STI2D et STL spécialité SPCL**
Durée de l'épreuve : **4 heures**	Coefficient : **4**

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le candidat doit s'assurer que le sujet distribué est complet.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE n°1 (3 points)

Le béton est un matériau de construction fabriqué à partir d'un mélange de ciment, de granulats et d'eau.

Selon l'usage prévu (dalle, poutre, fondation …), on utilise des bétons de compositions différentes.

Dans cet exercice, on s'intéresse au béton adapté à la construction d'une dalle et on étudie la résistance à la compression, exprimée en MPa (mégapascal), en fonction de la durée t de séchage, exprimée en jour.

On admet que cette résistance peut être modélisée par une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, qui est une solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0{,}15y = 4{,}5.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $[0\,;+\infty[$.

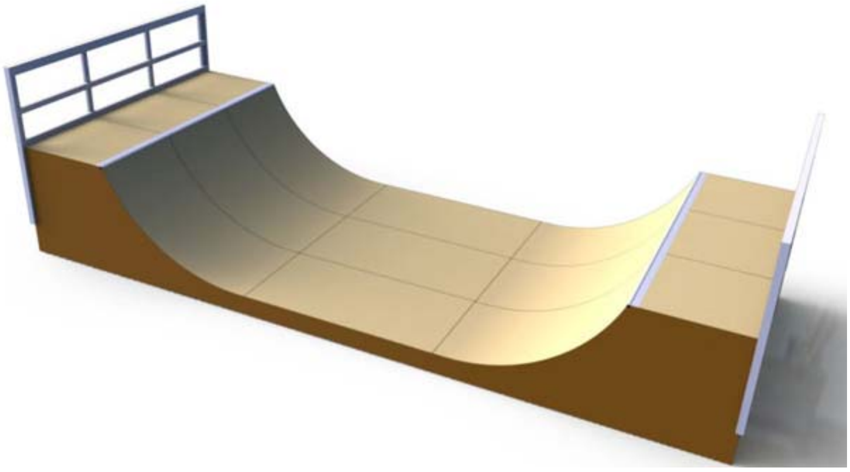
2. À l'instant $t = 0$, la résistance à la compression de ce béton est nulle.
Montrer alors que f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = -30\mathrm{e}^{-0{,}15t} + 30$.

3. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

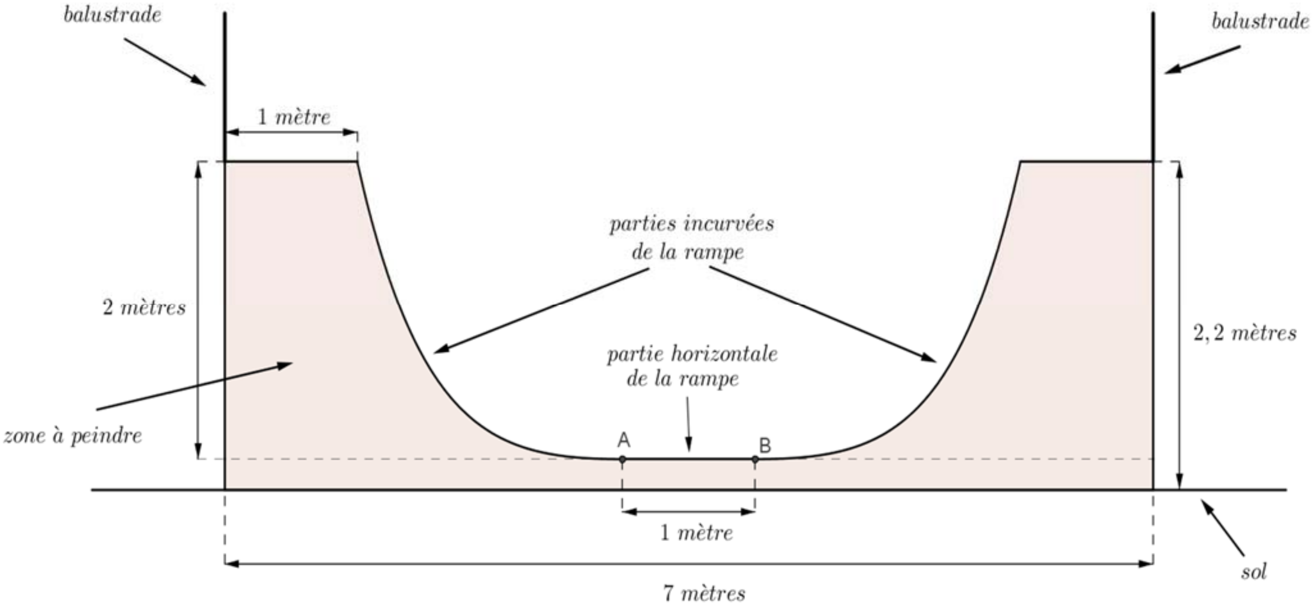
4. Il est possible de marcher sur ce type de béton lorsque sa résistance à la compression est supérieure à 12 MPa.

Après combien de jours complets de séchage est-il possible de marcher sur ce type de béton ?

EXERCICE n°2 (7 points)



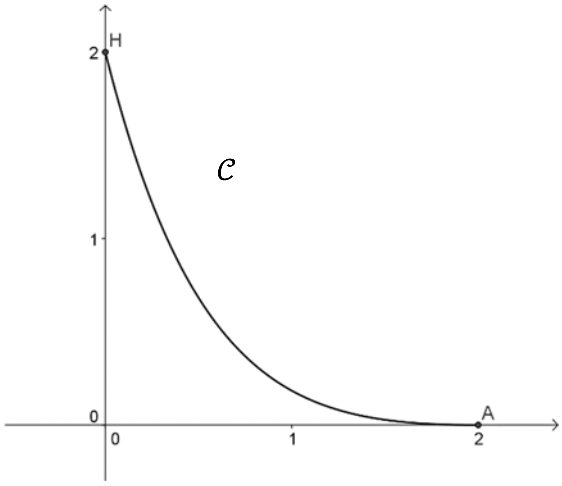
On a représenté ci-dessous une des faces latérales d'une rampe de skate-board que l'on souhaite peindre.



On sait de plus que la face latérale de cette rampe de skate-board admet comme axe de symétrie la médiatrice de $[AB]$.

Partie A

On modélise la partie incurvée de la rampe située à gauche de l'axe de symétrie à l'aide de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;2]$ par : $f(x) = (0{,}5x^2 + ax + b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels que l'on souhaite déterminer.
On a tracé ci-après la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthonormal d'unité 1 mètre.



On sait que la courbe $\mathcal{C}$ passe par les points A$(2\,;0)$ et H$(0\,;2)$.

1. Déterminer $f(0)$ et $f(2)$.

2. Déduire de la question précédente le système d'équations vérifié par les réels a et b.

3. Déterminer l'expression de $f(x)$.

Partie B

On considère maintenant que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = (0{,}5\,x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. Montrer que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A est l'axe des abscisses.

3. Justifier que le signe de $f'(x)$ est donné par le signe du trinôme $-0{,}5\,x^2 + 3x - 4$.

4. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur $[0\,;2]$.

Partie C

1. Justifier que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;2]$.

2. On admet que la fonction F définie par $F(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + x - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$ sur l'intervalle $[0\,;2]$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;2]$.

Montrer que l'aire en m^2 de la partie délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ est égale à $1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

3. En déduire l'aire de la zone à peindre. On donnera une valeur approchée du résultat à $0{,}01\ \mathrm{m}^2$ près.

EXERCICE n°3 (6 points)

Une éolienne est un générateur qui produit du courant électrique à partir de l'énergie cinétique du vent.

Une entreprise européenne réalise la conception, la fabrication, la vente, l'installation ainsi que l'exploitation et la maintenance de ses éoliennes.

Son service de presse a publié un article en janvier 2017 dont voici un extrait :
« Une de nos usines située en Espagne, en exploitation depuis 2001, a produit au total plus de 40 000 pales d'éoliennes de 2001 à 2016, pales qui ont été exportées vers cinq continents. »

On dispose également des données suivantes sur la production de l'usine espagnole considérée.

Année	Quantité de pales produites pendant l'année
2001	800
2008	2 002

Partie A

Le but de cette partie est de trouver une suite modélisant au mieux la production des pales d'éoliennes de l'usine espagnole depuis 2001. On étudie deux modélisations.

1. Dans cette question, on se propose de modéliser le nombre de pales produites par l'usine espagnole pendant l'année $2001 + n$, où n est un entier naturel, par la valeur arrondie à l'entier le plus proche de u_n où $u_n = 800 + 578\ln(n + 1)$.

a. Vérifier que cette suite satisfait aux données du tableau précédent.

b. On considère l'algorithme suivant :

```
S ← 0
Pour i allant de 0 à 15
  | S ← S+ ARRONDI(800 + 578 ln(i + 1))
Fin Pour
```

On précise que *ARRONDI* (x) signifie : calculer la valeur arrondie de x à l'entier le plus proche.
Une fois l'algorithme exécuté, S contient la valeur 30 529. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

c. La suite (u_n) peut-elle modéliser la production des pales d'éoliennes de l'usine espagnole depuis 2001 ? Justifier la réponse.

2. On examine maintenant une modélisation de la production par la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 800$ et de raison $q = 1{,}14$.

a. Exprimer v_n en fonction de *n* .

b. Calculer v_7. On donnera le résultat arrondi à l'unité.

c. On rappelle que la somme des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison $q \neq 1$ est donnée par :

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} .$$

Calculer $v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$. On donnera le résultat arrondi à l'unité.

d. Peut-on modéliser par la suite (v_n) la production, depuis 2001, de pales d'éoliennes de l'usine espagnole ? Justifier la réponse.

<u>Partie B</u>

L'entreprise gère aussi la réparation des pales sur leur lieu d'utilisation.

On estime que la durée de vie d'une pale, exprimée en années, avant la première réparation, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}125$.

Pour chaque question, donner le résultat arrondi à 10^{-3} .

1. Calculer $P(0 \leq \text{X} \leq 5)$.

2. Calculer la probabilité qu'une pale n'ait pas eu de réparation au cours des dix premières années.

3. Déterminer la durée de vie moyenne d'une pale avant la première réparation.

EXERCICE n°4 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante choisie.

1. Si $z_1 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ alors le quotient $\frac{z_1}{(z_2)^2}$ vaut :

a. -2 **b.** $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$ **c.** 2 **d.** $-\sqrt{3} - \mathrm{i}$

2. Si $z_1 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ alors le produit $\overline{z_1} \times z_2$ vaut :

a. -2 **b.** $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ **c.** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ **d.** $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ. Sachant que $P(\mathrm{X} \in [189\,;191]) \approx 0{,}95$, μ et σ peuvent prendre les valeurs :

a. $\mu = 1$ et $\sigma = 190$ **b.** $\mu = 190$ et $\sigma = 1$

c. $\mu = 190$ et $\sigma = 0{,}5$ **d.** $\mu = 0{,}5$ et $\sigma = 190$

4. Dans le cadre du fonctionnement correct d'une chaîne de production de pièces détachées, la proportion de pièces détachées conformes doit être 96 %.
On contrôle la production de la chaîne en prélevant de manière aléatoire un échantillon de 150 pièces détachées.

On rappelle que l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence p des pièces détachées conformes sur un échantillon de taille n est :

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

En utilisant un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 %, on prendra la décision d'effectuer des réglages sur la chaîne de production si le nombre de pièces détachées non conformes trouvées dans l'échantillon prélevé est :

a. 8 **b.** 9 **c.** 10 **d.** 11