BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

Séries STI2D et STL spécialité SPCL

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

ÉPREUVE DU MARDI 19 JUIN 2018

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 / 7 à 7 / 7

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE n° 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. **Aucune justification n'est demandée.** Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante choisie.

1. Le plan complexe est muni d'un repère $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$. On considère le point A de coordonnées $(-4\sqrt{2}\,;\,4\sqrt{2})$.

   Une écriture exponentielle de l'affixe du point A est :

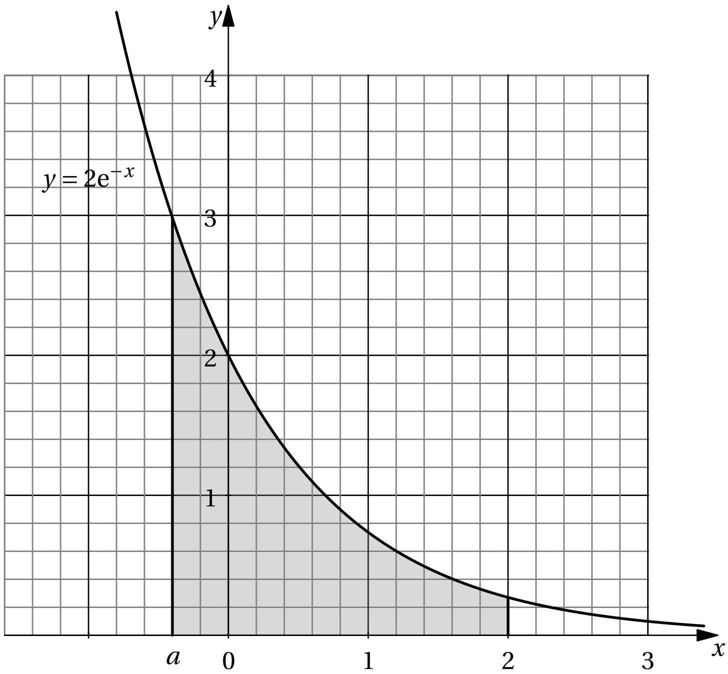
   a. $8\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

   b. $8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

   c. $4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

   d. $4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

2. Sur le graphique ci-dessous, l'aire grisée est délimitée par la courbe d'équation $y = 2\mathrm{e}^{-x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = 2$, où a est un nombre réel strictement inférieur à 2.



   L'aire grisée a une valeur strictement comprise entre 0,5 et 1 unité d'aire lorsque a est égal à :

   a. $-0{,}5$

   b. 0

   c. 0,5

   d. 1,5

3. On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$. On note f l'unique solution de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 5$.

   La valeur de $f(2)$ est :

   a. $2e^{-4} + 3$

   b. $2e^{4} + 3$

   c. $5e^{-4} + 3$

   d. $5e^{4} + 3$

4. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.

   La primitive F de f sur $]0\,;\,+\infty[$ telle que $F(1) = 3$ est donnée par :

   a. $F(x) = x\ln(x) - 2x + 5$

   b. $F(x) = \frac{3}{x}$

   c. $F(x) = x\ln(x) + 3$

   d. $F(x) = x\ln(x) - x + 4$

EXERCICE n° 2 (6 points)

Après son installation, un lundi matin, un aquarium contient 280 litres d'eau et des poissons. Par évaporation, le volume d'eau dans l'aquarium diminue de 2% par semaine. Compte tenu du nombre de poissons, cet aquarium doit contenir en permanence au minimum 240 litres d'eau.

Partie A

1. Quel volume d'eau restera-t-il dans l'aquarium au bout d'une semaine ?
2. Est-il vrai qu'au bout de deux semaines, exactement 4% du volume d'eau initial se seront évaporés ? Justifier.
3. Déterminer au bout de combien de semaines le volume d'eau dans l'aquarium deviendra insuffisant.

Partie B

On ajoute chaque lundi matin, en une seule fois, 5 litres d'eau pour compenser l'évaporation hebdomadaire de 2%.

On note u_0 le volume initial d'eau en litres dans l'aquarium. Ainsi $u_0 = 280$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note u_n le volume d'eau dans l'aquarium, en litres, n semaines après son installation, immédiatement après l'ajout hebdomadaire des 5 litres d'eau.

1. Vérifier que $u_2 = 278{,}812$.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}98\,u_n + 5$.
3. Montrer que la suite (u_n) n'est pas géométrique.
4. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel k désigne un nombre entier naturel et U un nombre réel.

```
U ← 280
Pour k allant de 1 à ...
   U ← ...
Fin Pour
```

   a. Recopier et compléter l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable U contienne u_6.

   b. Quel est le volume d'eau dans l'aquarium, en litres à 10^{-2} près, 6 semaines après son installation immédiatement après l'ajout hebdomadaire des 5 litres d'eau.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 250$. On admet que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}98$.

   a. Calculer v_0.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 30 \times 0{,}98^n + 250$.

   d. Justifier que la préconisation concernant le volume d'eau dans l'aquarium est respectée.

EXERCICE n° 3 (6 points)

Le niveau sonore N d'un bruit, à une distance D de sa source, dépend de la puissance sonore P de la source. Il est donné par la relation

$$N = 120 + 4\ln\left(\frac{P}{13 \times D^2}\right)$$

où N est exprimé en décibels (dB), P en Watts (W) et D en mètres (m).

Partie A

*Les questions **1.** et **2.** sont indépendantes.*

1. Calculer le niveau sonore N d'un bruit entendu à 10 mètres de la source sonore dont la puissance P est égale à 2,6 Watts. *On arrondira le résultat à l'unité.*

2. On donne $N = 84$ dB et $D = 10$ m. Déterminer P. *On arrondira le résultat à* 10^{-2} *près.*

Partie B

Une entreprise de travaux publics réalise un parking en plein air. Sur le chantier d'aménagement de ce parking, une machine de découpe a une puissance sonore P égale à 0,026 Watts.

1. **a.** Montrer qu'à une distance D de la machine, le niveau sonore N dû à celle-ci vérifie la relation :

   $$N = 120 + 4\ln(0{,}002) - 4\ln\left(D^2\right)$$

   b. Montrer qu'une approximation de N peut être $95{,}14 - 8\ln(D)$.

Dans la suite de l'exercice, à une distance de x mètres de la machine, le niveau sonore N émis par la machine est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}1\,;20]$ par :

$$f(x) = 95{,}14 - 8\ln(x)$$

2. **a.** Déterminer une expression de $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

   b. Donner le signe de $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0{,}1\,;20]$.

   c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}1\,;20]$.

3. On suppose qu'un ouvrier de cette entreprise se situe à trois mètres de la machine.

   La législation en vigueur l'oblige à porter des protections individuelles contre le bruit dès qu'un risque apparaît.

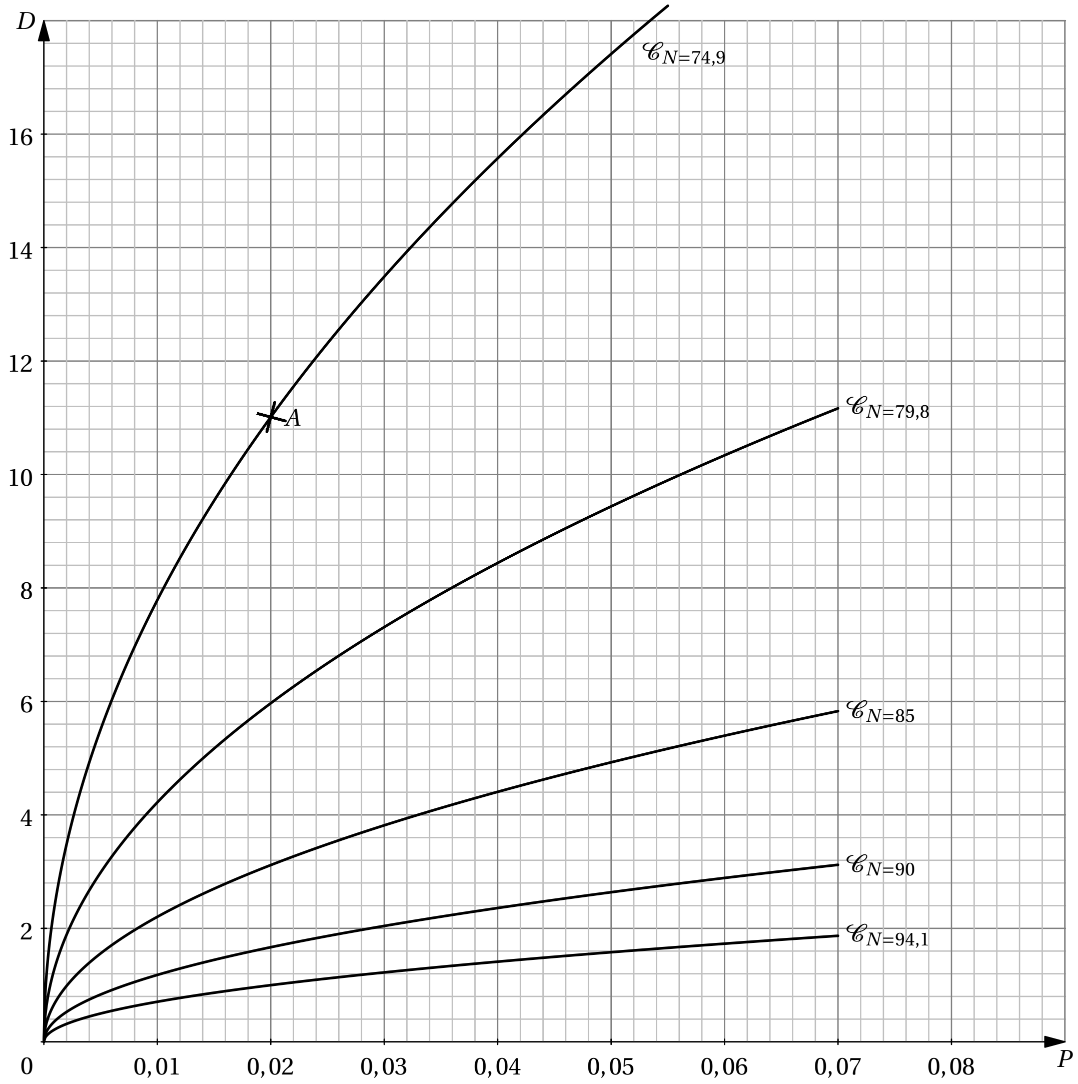
   Justifier, à l'aide du tableau ci-dessous, que l'ouvrier doit porter des protections individuelles contre le bruit.

Impacts sur l'audition	**Niveaux sonores en décibels**
Aucun	$[0;85[$
Risque faible	$[85;90[$
Risque élevé	$[90;120[$

4. Déterminer à quelle distance de la machine un ouvrier de l'entreprise sort de la zone de risque élevé (c'est-à-dire lorsque le niveau sonore est inférieur à 90 dB).

Partie C

On s'intéresse au lien entre la puissance P d'un bruit et la distance D de sa source pour différentes valeurs de son niveau sonore N.



On admet que pour une puissance de 0,02 Watt, le niveau sonore du bruit est de 74,9 décibels à une distance de 11 mètres de la source sonore. Ainsi, le point A de coordonnées $(0,02\,;\,11)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_{N=74,9}$.

1. Pour un bruit de puissance P égale à 0,06 W, déterminer graphiquement à quelles distances minimale et maximale de la source peut se situer une personne pour que le niveau sonore N soit compris entre 85 et 90 dB.

2. Pour une source sonore située à une distance D de 8 m, déterminer graphiquement les puissances minimale et maximale de cette source pour obtenir un niveau sonore compris entre 74,9 dB et 79,8 dB.

EXERCICE n° 4 (4 points)

Un industriel commercialise des portes blindées. Il projette de lancer un nouveau modèle de portes blindées : les portes « SECUR ». Équipées d'un digicode et d'une caméra, elles seront donc plus sécurisées que celles déjà existantes sur le marché.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} *près.*

Partie A

Avant de débuter son projet, l'industriel s'intéresse à une étude portant sur le prix de vente des portes blindées classiques existantes.

Le prix de vente, en euros, d'une porte blindée classique est une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 3\,000$ et d'écart type $\sigma = 750$.

1. Déterminer la probabilité $P(1\,500 \leqslant X \leqslant 4\,500)$.

2. Déterminer la probabilité qu'une porte blindée classique coûte plus de 2 500 euros.

3. **a.** Recopier et compléter le tableau suivant où a désigne un nombre entier naturel.

a	$P(X \leqslant a)$
3 950	0,8974
3 960	
3 970	

   b. Déterminer le montant minimal, à l'euro près, tel qu'au moins 90% des portes blindées classiques aient un prix de vente inférieur à ce montant.

   c. L'industriel estime que le prix de vente du modèle de porte blindée équipée « SECUR » ne devra pas dépasser de plus de 15% le montant minimal précédent.
   Quel prix de vente maximal M, à l'euro près, peut-il envisager pour une porte du modèle « SECUR » ?

Partie B

L'industriel envisage de commercialiser les portes blindées de modèle « SECUR » au tarif M déterminé précédemment. Il souhaite estimer la proportion de personnes susceptibles d'acheter son nouveau modèle. Une enquête est réalisée sur un échantillon de 984 personnes intéressées par l'achat d'une porte blindée. Sur cet échantillon, 123 personnes se disent favorables à l'achat du modèle « SECUR ».

1. Déterminer l'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95%, de la proportion de personnes favorables à l'achat du nouveau modèle.

On rappelle que pour une fréquence f observée dans un échantillon de taille n, l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95% de la proportion p du caractère étudié dans la population est donné par : $\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\,;\, f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$.

2. Pour que l'industriel prenne le risque d'investir dans les portes « SECUR », il faudrait qu'au minimum 20% des personnes souhaitant s'équiper d'une porte blindée soient favorables à ce nouveau modèle. A-t-il intérêt à réaliser son projet ?