Baccalauréat technologique – Série STMG

Session 2018 (Métropole)

Épreuve de Mathématiques

Proposition de corrigé

Ce corrigé est composé de 6 pages.

Notations

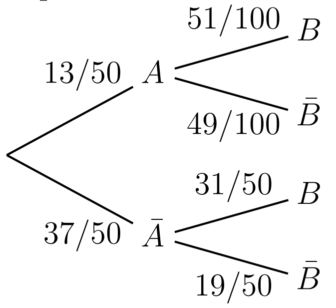
Dans tout ce corrigé, pour des soucis pratiques, on utilisera les notations suivantes :
$\forall$: « pour tout » ;
$\Longrightarrow$: « implique » ;
$\Longleftrightarrow$: « équivaut à ».
De plus, on notera $\mathbb{P}(A)$ la probabilité de l'événement A et $\mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de l'événement B sachant A.

*

* *

Exercice 1

1. On complète l'arbre de probabilité à partir des données du texte :



2. L'évènement $A \cap \bar{B}$ correspond à « l'élève est inscrit dans un établissement d'Île de France, qui n'est pas une université ».
Sa probabilité vaut $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_B(\bar{B}) = \frac{13}{50} \times \frac{49}{100} \approx 0,13$.
L'élève sera donc inscrit dans un établissement d'Île de France hors université avec une probabilité $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \approx 0,13$.

3. On cherche la probabilité de l'événement B. Or, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{13}{50} \times \frac{51}{100} + \frac{37}{50} \times \frac{31}{50} = 0,5914$$

La probabilité de l'événement B vaut donc bien $\mathbb{P}(B) = 0,5914$.

4. On cherche à vérifier si l'affirmation du responsable du ministère est vraie. On va alors calculer la probabilité $\mathbb{P}_B(A)$. Or, d'après la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{51}{100} \times \frac{13}{50}}{0,5914} = 0,22$$

La probabilité qu'un étudiant à l'université le soit en Île de France vaut donc $\mathbb{P}_B(A) = 0,22$, ce qui vérifie bien $\frac{1}{5} < \mathbb{P}_B(A) < \frac{1}{4}$. L'affirmation est vraie.

Exercice 2

Remarque : cet exercice est un QCM, pour lequel il n'est pas demandé de justifier les réponses. Aussi, les justifications données le sont à titre purement informatif, et ne devaient pas figurer sur la copie.

1. Réponse c.

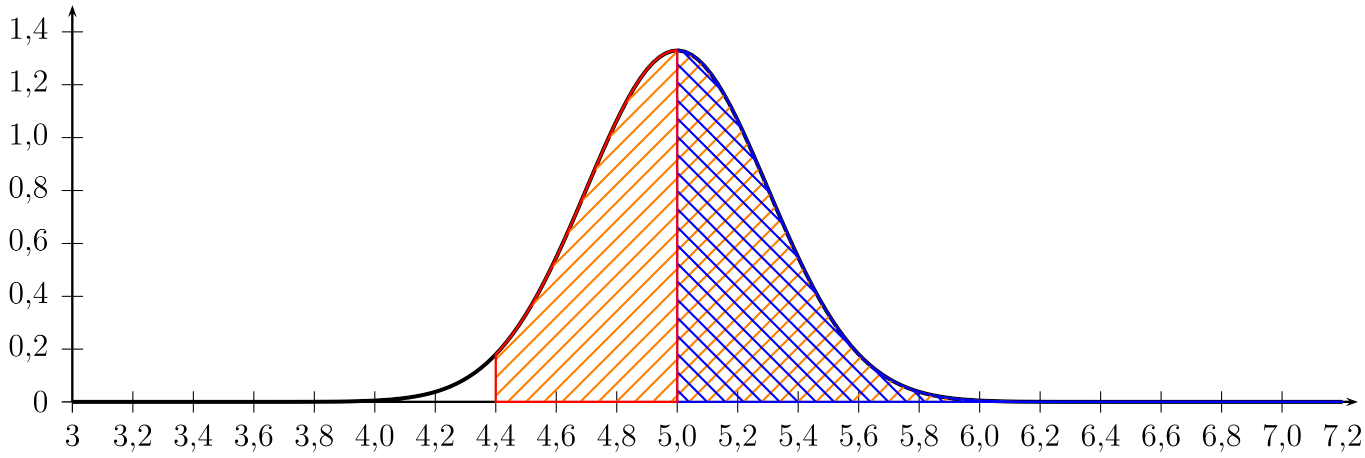
Justification :

On nomme p le prix de départ. Après augmentation de 22 %, il vaudra $p' = p + 0,22p = 1,22p$. Ensuite, on effectue une baisse de 20 %. Or, ces 20 % sont calculés sur le nouveau prix, que l'on a appelé p'. On aura alors un prix final $p'' = p' - 0,2p' = 1,22p - 0,2 \times 1,22p = 0,8 \times 1,22 \times p = 0,976p$. Or, on remarque que $0,976p = p - 0,024p = p - 2,4\%$.

L'évolution globale est donc une baisse de 2,4 %.

2. Réponse c.

Justification :



On a $\mathbb{P}(4,4 \leqslant X \leqslant 5) = \mathbb{P}(X \geqslant 4,4) - 0,5$.

3. (i) Réponse a.

Justification :

Trouver $f'(2)$ revient à trouver le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 2. Or, cette droite est la droite (AB). Dans ce cas, on a (par définition du taux d'accroissement) :

$$f'(2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4-4}{0-2} = 4$$

On a donc bien $f'(2) = 4$.

(ii) Réponse c.

Justification :

Soit $x \in [-3; 6,5]$.

$$f'(x) \geqslant 0 \iff f \text{ croissante} \iff x \in [-\frac{2}{3}; 4]$$

.

4. $g : x \mapsto 2x^3 - 9x^2 - 24x + 32$

(i) Réponse c.

Justification :

Soit $x \in [-2; 8]$.

$g'(x) = 3 \times 2x^2 - 2 \times 9x - 24 = 6x^2 - 18x - 24$ *(formule de cours, $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$).*

(ii) Réponse c.

Justification :

On cherche à étudier les variations de g sur son ensemble de définition. On va alors dans un premier temps étudier le signe de sa dérivée.

La fonction g' est une fonction polynôme de degré 2, de discriminant $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 6 \times (-24) = 900 > 0$. L'équation $g'(x) = 0$ aura donc deux solutions réelles, $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$ (cf cours). De plus, on sait que $g'(x)$ sera du signe de son coefficient dominant, sauf entre ses racines, c'est-à-dire positive sur $[-2;-1] \cup [4;8]$ et négative sur $[-1;4]$.

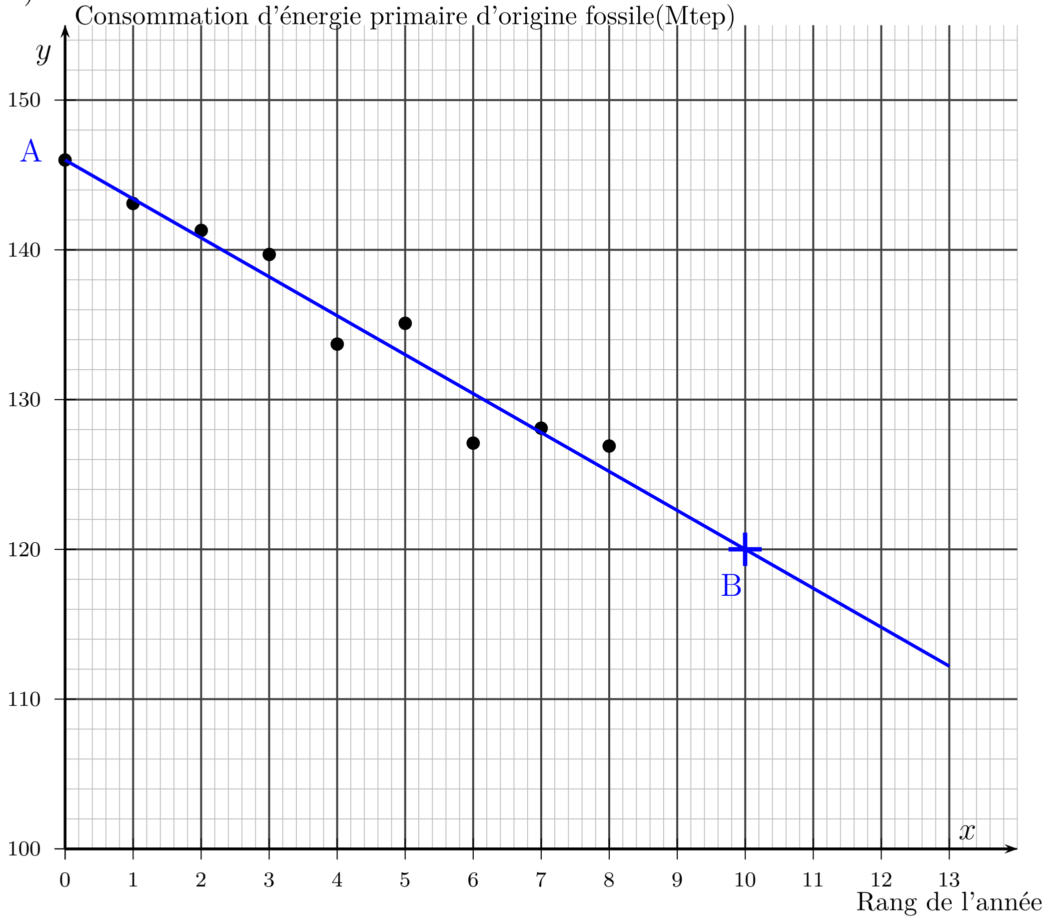
On en déduit alors que g est croissante sur $[-2;-1] \cup [4;8]$ et décroissante sur $[-1,4]$. Aussi, elle atteindra son minimum en 4, et il vaudra $g(4) = -80$.

Exercice 3

1. On utilise la calculatrice pour établir la régression linéaire de y en x, et cette dernière donne :

$$\boxed{y = -2,57x + 145,96}$$

2. On ajuste le nuage de points par la droite $(\mathscr{D})$: $y = -2,6x+146$. On trace alors cette dernière (en plaçant deux points lui appartenant, par exemple $A(0;146)$ et $B(10;120)$ et reliant ces derniers) :



3. On cherche à savoir en quelle année la consommation en énergie primaire d'origine fossile sera réduite de 30 % par rapport à sa valeur en 2012. On cherche alors x tel que $y(x) \leq 0,7y(7) = 0,7 \times 128,1 = 89,67$.

Soit $x \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} y(x) \leq 89,67 &\iff -2,6x + 146 \leq 89,67 \\ &\iff -2,6x \leq 89,67 - 146 = -56,33 \\ &\iff x \geq \frac{-56,33}{-2,6} \approx 21,6 \end{aligned}$$

(bien penser à inverser le sens de l'inégalité lorsqu'on divise par un négatif)

$$\iff \underline{x \geqslant 22}$$

Or, $2005 + 22 = 2027 < 2030$. L'objectif sera donc rempli en 2027, il le sera donc effectivement avant 2030.

Exercice 4

Partie A

1. On saisit, dans la cellule C3, la formule $\boxed{= (\text{C2} - \text{B2})/\text{B2}}$ (par définition d'un taux d'évolution).

2. Dans la cellule F3, on aura la valeur $\underline{\frac{222,9-169,7}{169,7} = 31\,\%}$.

Partie B

1. La valeur des encours des investissements socialement responsables (ISR) augmente tous les ans de 30 %. Aussi, si on appelle u_n cette valeur à l'année de rang $n \geq 0$, on aura $u_{n+1} = u_n + 0,3u_n = 1,3u_n$. D'où,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_{n+1} = 1,3u_n}$$

La suite (u_n) est donc bien géométrique, de raison $\underline{q = 1,3}$.

2. La suite (u_n) est alors définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 222,9 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1,3u_n \end{cases}$$

Or, d'après le cours, une suite géométrique de premier terme u_0 et raison q peut s'écrire, pour n entier, $u_n = u_0 q^n$. Alors ici, on obtient que pour tout entier n,

$$\boxed{u_n = 222,9 \times 1,3^n}$$

3. En 2018, on sera à l'année de rang 4. On aura par conséquent $u_4 = 222,9 \times 1,3^4 = 636,6$.
La valeur des encours des ISR au premier janvier 2018 vaudra donc $\underline{636,6 \text{ milliards d'euros}}$.

4. a) Après exécution, la variable N contient le rang de l'année telle que $u_N \geq 1000$, et U contient la valeur de u_N. En l'occurrence, on aura (après avoir fait tourner l'algorithme à la calculatrice) $\underline{N = 6}$ et $\underline{U = 1075,89}$.

Remarque : autre méthode (par le calcul)
$\rightarrow$ *Chercher la valeur de N revient à chercher l'entier N tel que* $222,9 \times 1,3^N \geq 1000$.

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_N \geq 1000 &\iff 222,9 \times 1,3^N \geq 1000 \\ &\iff 1,3^N \geq \frac{1000}{222,9} \\ &\iff N \ln(1,3) \geq \ln\left(\frac{1000}{222,9}\right) \quad \textit{(}x \mapsto \ln(x) \textit{ croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &\iff N \geq \frac{\ln(1000) - \ln(222,9)}{\ln(1,3)} \approx 5,2 \\ &\iff \underline{N \geq 6} \end{aligned}$$

b) Dans le contexte étudié, on comprend que la valeur des encours des ISR dépassera 1000 milliards d'euros au cours de l'année de rang 6, c'est-à-dire en 2020, et vaudra environ $1075,89$ milliards d'euros.

* *
*

Proposé par T. Prévost (thomas.prevost@protonmail.com) pour le site https://www.sujetdebac.fr/