Baccalauréat technologique – Série STMG

Session 2018 (Septembre, Métropole)

Épreuve de Mathématiques

Proposition de corrigé

Ce corrigé est composé de 5 pages.

Notations

Dans tout ce corrigé, pour des soucis pratiques, on utilisera les notations suivantes :

$\forall$: « pour tout » ;

$\Longrightarrow$: « implique » ;

$\Longleftrightarrow$: « équivaut à ».

De plus, on notera $p(A)$ la probabilité de l'événement A et $p_A(B)$ la probabilité de l'événement B sachant A.

*

* *

Exercice 1

Remarque : cet exercice est un QCM, pour lequel il n'est pas demandé de justifier les réponses. Aussi, les justifications données le sont à titre purement informatif, et ne devaient pas figurer sur la copie.

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(80, 10^2)$$

1. Réponse d.

Justification :

On trouve à la calculatrice : soit directement, soit en remarquant que $p(60 \leq X \leq 100) = p(X \leq 100) - p(x \leq 60)$.

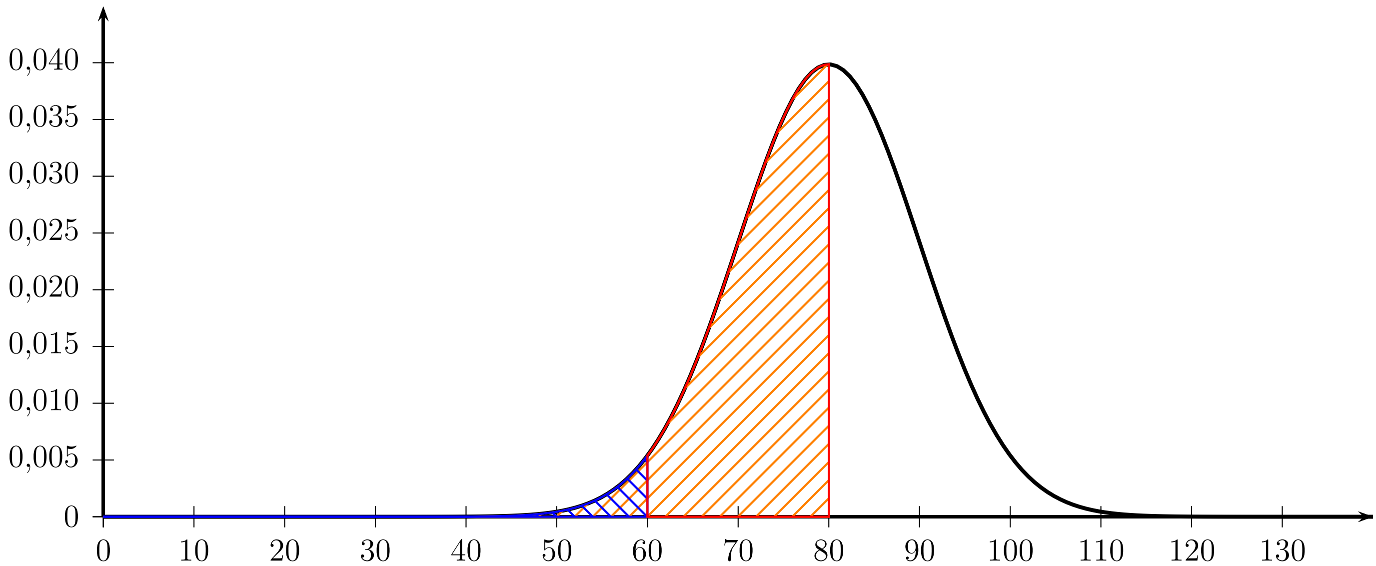
2. Réponse b.

Justification :

On remarque que $90 = \mu + \sigma$. *Alors par symétrie autour de l'espérance, on a* $p(X < \mu + \sigma) = p(X > \mu - \sigma)$ *donc finalement,* $p(X < 90) = p(X > 70)$.

3. Réponse b.

Justification :



$p(60 \leq X \leq 80) = 0,5 - p(X \leq 60)$

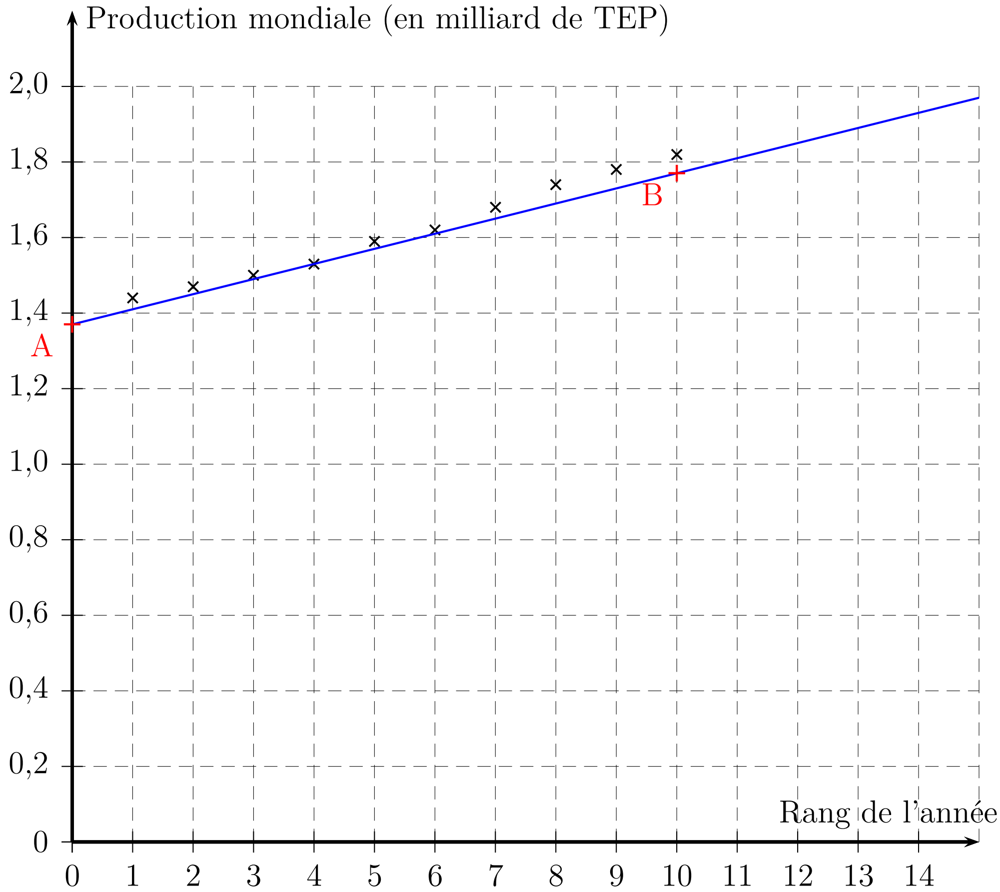
Exercice 2

Partie A

1. En effectuant une régression linéaire à la calculatrice, on trouve :

$$\boxed{y = 0,044x + 1,375}$$

2. On choisit d'ajuster le nuage de points par la droite $(\mathscr{D})$: $y = 0,04x + 1,37$. On trace alors cette droite sur le graphique donné, en plaçant deux points appartenant à la droite (par exemple $A(0;1,37)$ et $B(10;1,77)$) et en les reliant :



3. À l'aide de ce modèle, on peut estimer qu'en 2020, la production mondiale des énergies renouvelables sera de $y(x = 15) = 0,04 \times 15 + 1,37 \underline{= 1,97}$ milliard de TEP.

Partie B

1. Le taux d'évolution global entre 2006 et 2015 est défini par :

$$\tau = \frac{y(x = 10) - y(x = 1)}{y(x = 1)}$$

Alors $\tau = \frac{1,82-1,44}{1,44} \approx 0,26 \underline{= 26\,\%}$.

2. On peut alors en déduire le taux d'évolution annuel moyen τ_A :

$$\tau_A = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{26}{2015 - 2006} = \frac{26}{9} = 2,9\,\%$$

Le taux d'évolution annuel moyen vaut donc $\underline{\tau_A = 2,9\,\%}$.

Partie C

1. On nous précise que (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1,82$ et raison $q = 1,026$. On en déduit alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n = 1,82 \times 1,026^n}$$

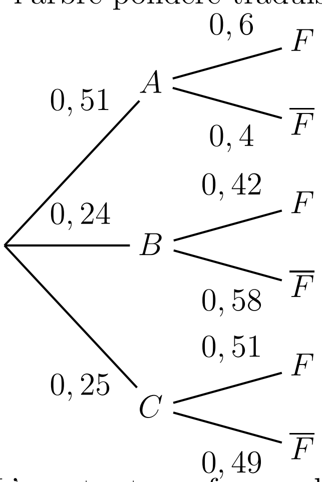
2. On peut alors calculer, grâce à ce modèle, une estimation pour l'année 2020 ($n = 5$) : $u_5 = 1,82 \times 1,06^5 = 2,07$. Aussi, la production mondiale des énergies renouvelables en 2020 sera de $\underline{u_5 = 2,07}$ milliards de TEP.

3. Cet algorithme cherche le rang K à partir duquel la valeur de U dépasse 4,84. Aussi, si on se replace dans le contexte étudié, cet algorithme permet de chercher l'année à partir de laquelle, en suivant le modèle donné plus haut, la production des énergies renouvelable sera supérieure ou égale à la production d'énergie pétrolière.

En l'occurrence, on a $K = 39$, et donc cette année sera l'année $2015 + 39 = 2054$! Et la production vaudra alors $u_39 = 4,95$ milliards de TEP.

Exercice 3

1. On complète, à l'aide des données, l'arbre pondéré traduisant la situation :



2. $A \cap F$ correspond à l'événement « L'agent est une femme de catégorie A ». Sa probabilité vaut $p(A \cap F) = p(A)p_A(F) = 0,51 \times 0,6 \underline{= 0,306}$.

3. On cherche la probabilité $p(F)$. On applique alors la formule des probabilités totales :

$$p(F) = p(A \cap F) + p(B \cap F) + p(C \cap F) = p(A)p_A(F) + p(B)p_B(F) + p(C)p_C(F)$$

$$p(F) = 0,51 \times 0,6 + 0,24 \times 0,42 + 0,25 \times 0,51 = 0,53$$

L'agent sera donc bien une femme avec une probabilité $\underline{p(F) = 0,53}$.

4. On cherche ici la probabilité $p_F(A)$. On applique alors la formule de Bayes :

$$p_F(A) = \frac{p_A(F)p(A)}{p(F)} = \frac{0,6 \times 0,51}{0,53} = 0,58$$

Sachant que le dossier est celui d'une femme, cette dernière fera partie de la catégorie A avec la probabilité $\underline{p_F(A) = 0,58}$.

Exercice 4

Partie A : étude d'un exemple

Dans cette partie, on note $P(a)$ le prix du billet à l'année a, et $N(a)$ le nombre d'entrées.

1. On a $P(2017) = 50$. Aussi, si on diminue le prix du billet de 10 %, on aura $P(2018) = P(2017) - 0,1P(2017) = 0,9P(2017) = 0,9 \times 50 = 45$. Au mois d'août 2018, le billet vaudra donc $\underline{P(2018) = 45 \text{ euros}}$.

2. Selon le modèle utilisé dans cet exercice, une diminution de 10 % du prix du billet entraînera une hausse de $2 \times 10 = 20$ % du nombre d'entrées. On aura alors $N(2018) = N(2017) + 0,2N(2017) = 1,2N(2017) = 1,2 \times 16000 = 19200$. En août 2018, on comptera donc $\underline{N(2018) = 19\,200 \text{ entrées}}$.

3. Le chiffre d'affaires du mois d'août 2018 sera alors de $P(2018) \times N(2018) = 45 \times 19200 \underline{= 864\,000 \text{ euros}}$.

Partie B : utilisation d'un tableur

1. On désire obtenir le chiffre d'affaires, c'est-à-dire la valeur du produit du nombre d'entrées par le prix d'un billet. On saisit donc : $\boxed{\texttt{= B2 * B3}}$.

2. Le pourcentage, indiqué dans les cellules `B1` à `I1` est défini à partir du prix « de base », c'est-à-dire celui de la cellule `B2`. Si on veut retrancher x %, il faut le faire à partir de ce dernier, et donc bloquer la colonne. La formule à saisir est alors la suivante : $\boxed{\texttt{= \$B2 * (1 - C1/100)}}$.

3. On remarque, par lecture du tableur, que le bénéfice est maximal pour une réduction entre 20 et 30 %.

Partie C : étude d'une fonction

$$f : x \mapsto -160x^2 + 8\,000x + 800\,000$$

1. La fonction f est une fonction polynôme de degré 2, de la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a < 0$. On sait alors (*cf* cours) qu'elle sera croissante sur $[0; -\frac{b}{2a}]$ et décroissante sur $[-\frac{b}{2a}; 100]$.
De plus, on calcule $-\frac{b}{2a} = \frac{-8\,000}{2\times(-160)} = 25$. La fonction f sera donc <u>croissante</u> sur $[0; 25]$ et <u>décroissante</u> sur $[25; 100]$, et admettra alors un maximum en $x = 25$.

(*Remarque : on retrouve le même résultat en étudiant le signe de la dérivée*)

2. Si on retranche x % au prix du billet en 2017 qui est de 50 euros, on aura un nouveau prix de $50 - \frac{x}{100} \times 50 = 50 - \frac{50}{100}x \underline{= 50 - 0,5x}$. Le nouveau prix sera donc bien de $50 - 0,5x$.

3. De même, si on augmente de $(2x)$ % le nombre d'entrées, on aura un nouveau nombre d'entrées de $16\,000 + \frac{2x}{100} \times 16\,000 = 16\,000 + \frac{2\times 16\,000}{100}x \underline{= 16\,000 + 320x}$.

4. On remarque que la fonction f vaut $800\,000$, qui est le montant du bénéfice en 2017 lorsque $x = 0$, et vaut 0 lorsque $x = 100$. De plus, son maximum est atteint en $x = 25$ et on a bien $20 < 25 < 30$.
La fonction f modélise alors bien le chiffre d'affaires du parc de loisirs.

5. Le chiffre d'affaires sera donc, comme remarqué précédemment, maximal pour une réduction de 25 %.

6. Il vaudra alors $f(25) = -160 \times 25^2 + 8000 \times 25 + 800000 \underline{= 900\,000 \text{ euros}}$.

* *
*

Proposé par T. Prévost (thomas.prevost@protonmail.com) pour le site
https://www.sujetdebac.fr/