Baccalauréat technologique – Série STMG

Session 2018 (Polynésie)

Épreuve de Mathématiques

Proposition de corrigé

Ce corrigé est composé de 5 pages.

Notations

Dans tout ce corrigé, pour des soucis pratiques, on utilisera les notations suivantes :
$\forall$: « pour tout » ;
$\Longrightarrow$: « implique » ;
$\Longleftrightarrow$: « équivaut à ».
De plus, on notera $\mathbb{P}(A)$ la probabilité de l'événement A et $\mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de l'événement B sachant A.

*
* *

Exercice 1

Remarque : cet exercice est un QCM, pour lequel il n'est pas demandé de justifier les réponses. Aussi, les justifications données le sont à titre purement informatif, et ne devaient pas figurer sur la copie.

1. Réponse **A**.

Justification :
La population diminue de 3 % chaque année. Aussi, la population en 2018 sera égale à celle en 2017, à laquelle on aura retranché 3 %. Alors on a $u_1 = u_0 - 0,03u_0 = 0,97u_0 = 0,97 \times 300 = 291$.

2. Réponse **C**.

Justification :
La population diminue de 3 % d'une année sur l'autre. Alors si on note u_n *la population à l'année* $(2017 + n)$*, on aura, pour tout entier* n, $u_{n+1} = u_n - 0,03u_n = 0,97u_n$.
La suite (u_n) *est donc géométrique, de raison* $q = 0,97$.

3. Réponse **D**.

Justification :
La suite (u_n) *étant géométrique de raison* $0,97$*, le résultat à afficher dans la case B3 sera* $0,97$ *fois celui de la case B2. D'où la formule choisie.*

4. Réponse **B**.

Justification :
On cherche le rang n *tel que* $u_n \leq 0,5u_0 = 150$. *On peut alors lire sur le tableur qu'il s'agit du rang* $n = 23$*, et donc de l'année* $2017 + 23 = 2040$.

Exercice 2

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(40; 5^2)$$

1. La probabilité que le salarié ait entre 35 et 50 ans vaut $\underline{\mathbb{P}(35 \leq X \leq 50) = 0,82}$.

2. On cherche la valeur de $\mathbb{P}(X \geq 45)$, qui n'est pas calculable directement à la calculatrice. On doit alors modifier un peu l'expression.
On remarque alors que :

$$\mathbb{P}(X \geq 45) = \mathbb{P}(X \geq \mu + \sigma) = \mathbb{P}(X \leq \mu - \sigma) = 0,5 - \mathbb{P}(35 \leq X \leq 40) \overset{\text{cours}}{=} 0,5 - 0,34$$

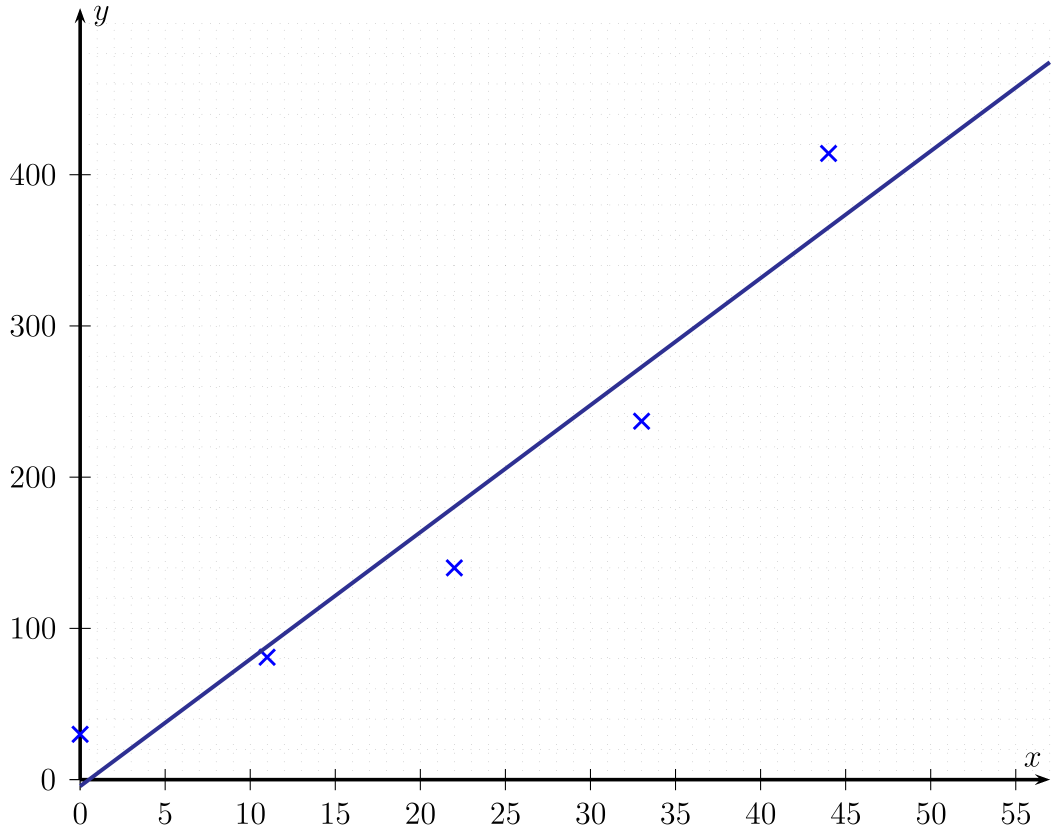
On en déduit alors que $\underline{\mathbb{P}(X \geq 45) = 0,16}$.

3. On considère alors $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, et on cherche la valeur de μ et σ.
Or, on sait que $\mathbb{P}(Y \geqslant 45) = 0,5$. Alors il vient naturellement que $\underline{\mu = 45}$. De plus, on a $\mathbb{P}(37 \leqslant Y \leqslant 53) \approx 0,95$, et on sait d'après le cours que $0,95 = \mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 2\sigma)$. D'où, $\mu + 2\sigma = 53 \implies 45 + 2\sigma = 53 \implies \sigma = \frac{53-45}{2} = 4$.
Alors finalement,

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{N}(45; 4^2)}$$

Exercice 3

1. On place, dans le repère, les différents points de coordonnées $(x_i; y_i)$:



2. a) On peut alors effectuer une régression linéaire à la calculatrice, et on trouve une équation de la droite d'ajustement : $y = 8,4x - 4,4$. On a tracé cette droite dans le repère de la question précédente.

b) On peut ainsi utiliser ce modèle pour estimer le nombre de catastrophes naturelles ayant eu lieu en 1990. En 1990, on a $x = 35$), il y a donc eu environ $\underline{y(35) = 289,6 \approx 290}$ catastrophes naturelles.

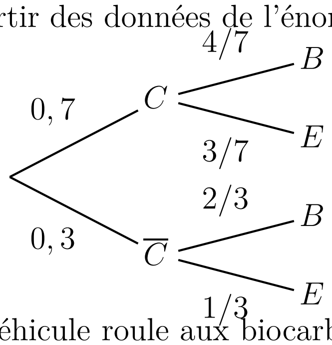
3. Entre 1999 et 2000, on nous dit que le nombre de catastrophes naturelles a augmenté de 27 %. On a alors, en 2000, $y(x = 45) = y(x = 44) + 0,27y(x = 44) = 1,27y(x = 44) = 1,27 \times 414 = 525,78 \underline{\approx 526}$ catastrophes naturelles.

4. De 2000 à 2016, on enregistre un taux global d'évolution $\tau = -43,5\,\%$. Ce qui signifie que le taux d'évolution annuel moyen sur cette période est de $\tau_A = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{-43,5}{16} = -2,72\,\%$.
Le taux d'évolution annuel moyen est donc, entre 2000 et 2016, de $\underline{\tau_A = -2,72\,\%}$, c'est-à-dire une baisse de 2,72 % par an en moyenne.

Exercice 4

Partie A

1. On complète l'arbre pondéré à partir des données de l'énoncé :



2. On cherche la probabilité que le véhicule roule aux biocarburants, c'est-à-dire la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(B)$. On applique alors la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C \cap B) + \mathbb{P}(\bar{C} \cap B) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}_C(B) + \mathbb{P}(\bar{C})\mathbb{P}_{\bar{C}}(B) = 0,7 \times \frac{4}{7} + 0,3 \times \frac{2}{3} = 0,6$$

Le véhicule choisi roulera alors aux biocarburants avec la probabilité $\underline{\mathbb{P}(B) = 0,6}$.

3. On cherche la probabilité que le véhicule soit sans chauffeur, sachant qu'il roule aux biocarburants, ce qui équivaut à la probabilité $\mathbb{P}_B(\bar{C})$. On a alors, d'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_B(\bar{C}) = \frac{\mathbb{P}_{\bar{C}}(B)\mathbb{P}(\bar{C})}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{2}{3} \times 0,3}{0,6} = \frac{1}{3}$$

Aussi, sachant qu'il roule aux biocarburants, le véhicule choisi aura une chance sur trois d'être sans chauffeur.

Partie B

$$f : x \mapsto \frac{8x^2 - 800x + 30000}{x^2}$$

1. Selon ce modèle, pour une vitesse de $30\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, on aura une consommation de $f(30) = 14,7$ litres aux 100 km.

Pour une vitesse de $50\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, on aura $f(50) = 4,0$ litres pour 100 km.

2. On calcule la dérivée de f, en remarquant que cette dernière sera de la forme $(u/v)'$: Soit $x \in [30; 130]$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(16x - 800)x^2 - 2x(8x^2 - 800x + 30000)}{x^4} \\
&= \frac{x(16x - 800) - 2(8x^2 - 800x + 30000)}{x^3} \\
&= \frac{16x^2 - 800x - 16x^2 + 1600x - 60000}{x^3} \\
f'(x) &= \frac{800x - 60000}{x^3}
\end{aligned}$$

On retrouve donc bien l'expression donnée.

3. On souhaite dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur son domaine de définition. On commence alors par étudier le signe de $800x - 60000$.

Soit $x \in [30; 130]$. $800x - 60000 \leq 0 \iff 800x \leq 60000 \iff x \leq \frac{60000}{8} = 75$.

Le signe de $x \mapsto x^3$ étant évident, on en déduit le tableau de signe de $f'(x)$, puis les variations de f :

x	30		75		130
signe de $800x - 60000$		$-$	0	$+$	
signe de x^3		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$f(30)$	$\searrow$	$f(75)$	$\nearrow$	$f(130)$

4. La consommation est donc minimale pour une vitesse $x = 75\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, et vaut $\underline{f(75) = 2,7\,\text{litres pour 100 km}}$.

5. L'algorithme donné permet de chercher pour quelle plage de vitesses la consommation sera inférieure à 4 litres aux 100 km. On a alors deux méthodes pour trouver la valeur de x :
— *Première méthode :* on fait tourner l'algorithme sur la calculatrice, et on trouve $\underline{x = 51}$.
— *Seconde méthode :* on résout par le calcul, en cherchant x tel que $f(x) < 4$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} f(x) < 4 &\iff \frac{8x^2 - 800x + 30000}{x^2} < 4 \\ &\iff 8x^2 - 800x + 30000 < 4x^2 \\ &\iff 8x^2 - 800x + 30000 - 4x^2 < 0 \\ &\iff 4x^2 - 800x + 30000 = P(x) < 0 \end{aligned}$$

Or, $P(x)$ est un polynôme de degré 2, de discriminant $\Delta = 800^2 - 4 \times 4 \times 30000 = 160\,000$. Il admet donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{800 - \sqrt{160000}}{8} = 50 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{800 + \sqrt{160000}}{8} = 150$$

Alors $f(x) < 4 \iff x_1 < x < x_2$. Or, $x_2 \notin [30; 130]$. D'où, $f(x) < 4 \iff \underline{x > 50}$.
L'algorithme renverra donc $\underline{x = 51}$.
Dans le contexte étudié, on comprend que la consommation de carburant sera inférieure à 4 litres aux 100 km à partir du moment où la vitesse du véhicule est strictement supérieure à $50\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

* *
*

Proposé par T. Prévost (thomas.prevost@protonmail.com) pour le site https://www.sujetdebac.fr/