Corrigé du bac 2019 : Mathématiques Obligatoire Série S – Amérique du Nord

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 7

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. a.

Pour que le tube soit accepté, il faut que son épaisseur soit comprise entre 1,35mm et 1,65mm. Donc il faut $1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65$, avec X qui suit une loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.

On doit alors calculer $P(1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65)$. On utilise la calculatrice grâce à la commande *normalFRép(1.35,1.65,1.5,0.07)* pour calculer cette probabilité. On trouve au final

$\boxed{P(1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65)=0{,}968}$

1. b.

On cherche à trouver σ_1 tel que $P(1{,}35 \leqslant X_1 \leqslant 1{,}65)=0{,}980$.

On a une loi normale, et 1,5 est au milieu de l'intervalle $[1{,}35;1{,}65]$, donc

$$\begin{aligned} P(1{,}35 \leqslant X_1 \leqslant 1{,}65) &= 2*P(1{,}5 \leqslant X_1 \leqslant 1{,}65) \\ &= 2*(P(X_1 \leqslant 1{,}65)-P(X_1 < 1{,}5)) \\ &= 2*(P(X_1 < 1{,}65)-0{,}5) \end{aligned}$$

Donc $P(1{,}35 \leqslant X_1 \leqslant 1{,}65)=0{,}980 \Leftrightarrow P(X_1 \leqslant 1{,}65)=\frac{0{,}980}{2}+0{,}5=0{,}990$

Donc, en passant en loi normale centrée réduite, on a

$$P\left(\frac{X_1-1{,}5}{\sigma_1} \leqslant \frac{1{,}65-1{,}5}{\sigma_1}\right)=0{,}990$$

En utilisant la fonctionnalité *FracNormale(p,0,1)* de la calculatrice, on peut retrouver la valeur de $\frac{1{,}65-1{,}5}{\sigma_1}$.

On trouve $\frac{1{,}65-1{,}5}{\sigma_1}=2{,}326$

Donc $\boxed{\sigma_1=\frac{1{,}65-1{,}5}{2{,}326}=0{,}064}$

2. a.

On cherche l'intervalle de fluctuation à 95 % qui concerne la proportion de tubes non « conformes pour la longueur » dans un échantillon de 250 tubes. On vérifie d'abord les premières hypothèses nécessaires à l'utilisation d'un intervalle de fluctuation :

$n=250 \geqslant 30$

$np=250*0{,}02=5 \geqslant 5$

$n(1-p)=250*0{,}98=245 \geqslant 5$

Ainsi, on peut maintenant écrire notre intervalle de fluctuation à 95 %, on rappelle déjà que :

$$I=\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]=\left[0{,}02-1{,}96\frac{\sqrt{0{,}02*0{,}98}}{\sqrt{250}};0{,}02+1{,}96\frac{\sqrt{0{,}02*0{,}98}}{\sqrt{250}}\right]$$

Donc, cela donne :

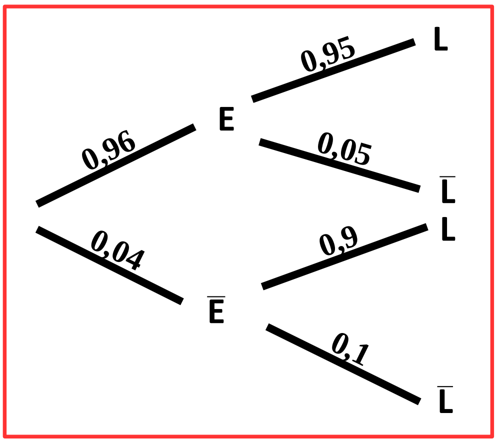
$\boxed{I=[0{,}003;0{,}037]}$.

2. b.

Ici, on a eu une erreur de $\frac{10}{250}=0{,}04$. On est en dehors de l'intervalle de fluctuation à 95 %, il est donc préférable de réviser la machine.

<u>Partie B</u>

1.



$P(E)=0{,}96$ « car 96 % des tubes de type 2 ont une épaisseur conforme ».

$P_E(L)=0{,}95$ car « parmi les tubes de type 2 qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme ».

$P_{\bar{E}}(L)=\frac{P(L\cap\bar{E})}{P(\bar{E})}=\frac{0{,}036}{0{,}04}=0{,}9$ car « 3,6 % des tubes de type 2 ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

2.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(L)=P(L\cap E)+P(L\cap\bar{E})$ car {E, $\bar{\text{E}}$} forme un système complet d'événements.

Donc $P(L)=P(E)P_E(L)+P(\bar{E})P_{\bar{E}}(L)$ avec la formule des probabilités conditionnelles.

Ce qui donne $\boxed{P(L)=0{,}96*0{,}95+0{,}04*0{,}9=0{,}948}$.

EXERCICE 2 (4 points)

1.

$z-i=i(z+1) \Leftrightarrow z(1-i)=2i \Leftrightarrow z=\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i+2i^2}{1-i+i-i^2}=\frac{2i-2}{2}=i-1$ est l'unique solution de l'équation donnée.

Or, $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})=1+i\neq 1-i$

Donc, l'affirmation 1 est FAUSSE.

2.

On cherche la forme exponentielle de $1+e^{2ix}$. On a :

$$\begin{aligned}1+e^{2ix}&=e^{ix}(e^{-ix}+e^{ix})\\&=e^{ix}(\cos(x)-i\sin(x)+\cos(x)+i\sin(x))\\&=2\cos(x)e^{ix}\neq 2\cos(x)e^{-ix}\end{aligned}$$

La forme exponentielle d'un complexe étant unique, l'affirmation 2 est FAUSSE.

3.

Soit M d'affixe z tel que $|z-i|=|z+1|$. On a :

$$\begin{aligned}|x+i(y-1)|=|x+1+iy| &\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}\\&\Rightarrow x^2+y^2-2y+1=x^2+2x+1+y^2 \quad \text{(par bijection de la fonction racine carrée)}\\&\Rightarrow -2y+1=2x+1\\&\Rightarrow x=-y\end{aligned}$$

Donc l'affirmation 3 est VRAIE.

4.

Soit $z^5+z-i+1=0$. Supposons que z soit réel, c'est à dire que sa partie imaginaire soit nulle. Alors, on aurait $z^5+z+1=i$.

Or, si z est réel, z^5 l'est aussi, 1 également, et une somme de réels est réelle. Donc l'égalité précédente est impossible, car i est un imaginaire.

Donc l'affirmation 4 est FAUSSE.

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

1.

On rappelle que $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$.

Ainsi, $f'(x)=1-\frac{1}{x+1}$, et $\frac{1}{x+1}\leqslant 1$ pour tout $x\in[0;+\infty[$.

Donc $f'(x)=1-\frac{1}{x+1}\geqslant 0$ pour tout $x\in[0;+\infty[$.

Donc $\boxed{\text{f est croissante sur } [0;+\infty[}$.

2.

De plus, $f(0)=0$, alors pour tout $x\in[0;+\infty[$, $f(x)\geqslant 0$ car f est croissante.

Donc $\boxed{\ln(x+1)\leqslant x \text{ pour tout } x\in[0;+\infty[}$.

Partie B

1.

$u_2=u_1-\ln(1+u_1)=(u_0-\ln(1+u_0))-\ln(1+(u_0-\ln(1+u_0)))$

Cela donne $\boxed{u_2=(1-\ln(1+1))-\ln(1+(1-\ln(1+1)))=0{,}039}$

2. a.

On va suivre un raisonnement par récurrence.

Initialisation :

$u_0=1\geqslant 0$

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n\geqslant 0$.

D'après la question **1.**, on a $u_n-\ln(u_n+1)\geqslant 0$, donc $u_{n+1}\geqslant 0$: hypothèse vérifiée au rang n+1.

Conclusion :

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel n, } u_n\geqslant 0}$

2. b.

D'après la question précédente, on a $1+u_n\geqslant 1$, donc $-\ln(1+u_n)\leqslant 0$ car la fonction ln est croissante.

Ainsi, $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$ et $u_{n+1}\leqslant u_n$: $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

Donc, comme $u_0=1$, alors $\boxed{u_n\leqslant 1 \text{ pour tout entier naturel n.}}$

2. c.

(u_n) est décroissante, donc soit elle tend vers une limite finie soit vers $-\infty$. Or, (u_n) est minorée par 0, donc nécessairement, $\boxed{(p_n) \text{ est convergente.}}$

3.

On nous dit que si l est la limite de la suite (u_n), alors $f(l)=l$, i.e. $l-\ln(l+1)=l$

On a donc $\ln(l+1)=0$, donc $\boxed{l=0}$.

4. a.

N ← 0 (On entre les valeurs initiales)

uN ← 1

Tant que uN ≥ 10^{-p} : (Tant que la suite n'est pas inférieure à 10^{-p}, on continue)

N ← N+1 (On met à jour la valeur de N)

uN ← uN – ln(1 + uN) (On met à jour la valeur de u_N)

Fin Tant que

4. b.

On exécute ce programme à la calculatrice, on obtient $\boxed{n=6}$.

Remarque : Il se peut que votre calculatrice ait des difficultés à exécuter ce programme et qu'elle affiche un résultat négatif dès n=5 à cause des erreurs d'arrondis. C'est un défaut de conception de ce sujet. Pour ne pas pénaliser les candidats, toutes les réponses à cette question ont très probablement été acceptés par les correcteurs.

EXERCICE 4 (5 points)

1.

– La droite (ML) appartient au plan (LMK).

– Le plan (MLK) est parallèle au plan (EFG) (face du haut du cube)

– La droite (IN) est orthogonale au plan (EFG), car elle passe par les milieux des faces hautes et basses, qui sont parallèles.

Donc (IN) est orthogonal à (MLK), donc à toute droite appartenant à (MLK), donc à (ML).

Conclusion : $\boxed{\text{(IN) est orthogonal à (ML).}}$

2. a

On rappelle que, avec deux points $A:(x_A;y_A;z_A)$ et $B:(x_B;y_B;z_B)$, on a $\vec{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

On a donc $\vec{NC}(1-\frac{1}{2};1-\frac{1}{2};0-1) \Rightarrow \boxed{\vec{NC}(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1)}$

Et $\vec{ML}(0-\frac{1}{2};\frac{1}{2}-0;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}) \Rightarrow \boxed{\vec{ML}(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)}$.

2. b

On réalise un produit scalaire entre $\vec{NC}$ et $\vec{ML}$:

$\vec{NC}\cdot\vec{ML}=-\frac{1}{2}*\frac{1}{2}+\frac{1}{2}*\frac{1}{2}+0=0$

Donc $\vec{NC}\perp\vec{ML}$, $\boxed{\text{donc } (NC)\perp(ML)}$

2. c.

On a, d'après les questions **1** et **2. b)**, $\vec{ML}$ orthogonal à (IN) et à (NC). Donc $\vec{ML}$ est orthogonal à (NCI).

Alors, on a une équation cartésienne du plan (NCI) :

$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+d=0$

Pour déterminer d, on utilise le point C(1;1;0) qui appartient au plan (NCI) :

$-\frac{1}{2}*1+\frac{1}{2}*1+d=0 \Rightarrow d=0$

$\boxed{\text{On trouve alors une équation cartésienne du plan (NCI) : } -\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=0}$.

3. a.

On nous donne une équation de plan. Si les points M, N et J appartiennent à ce plan, alors cette équation est une équation cartésienne du plan (NJM) car ces 3 points ne sont pas alignés. On a donc :

$0{,}5-0+0{,}5=1$: M appartient à ce plan.

$0{,}5-0{,}5+1=1$: N appartient à ce plan.

$1-0{,}5+0{,}5=1$: J appartient à ce plan.

Conclusion : $\boxed{x-y+z=1 \text{ est une équation cartésienne du plan (NJM).}}$

3. b.

Si (DF) est perpendiculaire au plan (NJM), alors elle est parallèle à son vecteur directeur, qui est $\vec{n}(1;-1;1)$ d'après l'équation cartésienne.

Or, $\vec{DF}(1-0;0-1;1-0)=(1;-1;1)=\vec{n}$, donc la droite (DF) est bien perpendiculaire au plan (NJM).

3. c.

Déjà, on sait que N appartient à cette droite car il appartient aux 2 plans.

Ensuite, on doit chercher un vecteur directeur de cette droite, qui doit appartenir aux 2 plans, ce qui signifie qu'elle est perpendiculaire aux 2 vecteurs directeurs des 2 plans.

On rappelle que $\vec{ML}(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$ est le vecteur directeur du plan (NCI) et $\vec{n}(1;-1;1)$ le vecteur directeur du plan (NJM).

Un opérateur nous permet d'avoir directement un vecteur directeur de notre droite sécante, c'est le produit vectoriel. On a donc, en nommant ce vecteur $\vec{u}$:

$\vec{u}=\vec{ML}\wedge\vec{n}=(\frac{1}{2}*1-(-1)*0;0*1-(-\frac{1}{2})*1;(-\frac{1}{2})*(-1)-1*\frac{1}{2})=(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$

Conclusion : $\boxed{\text{La droite passe par le point N et a pour vecteur directeur } \vec{u}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)}$.

Enfin, on remarque que $\vec{u}=\vec{EN}$, donc la droite sécante entre les plans (NCI) et (NJM) est (EN).