Corrigé du bac 2019 : Mathématiques Spécialité Série S – Amérique du Nord

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 9

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. a.

Pour que le tube soit accepté, il faut que son épaisseur soit comprise entre 1,35mm et 1,65mm. Donc il faut $1,35 \leqslant X \leqslant 1,65$, avec X qui suit une loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.

On doit alors calculer $P(1,35 \leqslant X \leqslant 1,65)$. On utilise la calculatrice grâce à la commande *normalFRép(1.35,1.65,1.5,0.07)* pour calculer cette probabilité. On trouve au final

$\boxed{P(1,35 \leqslant X \leqslant 1,65)=0,968}$

1. b.

On cherche à trouver σ_1 tel que $P(1,35 \leqslant X_1 \leqslant 1,65)=0,980$.

On a une loi normale, et 1,5 est au milieu de l'intervalle $[1,35;1,65]$, donc

$$\begin{aligned} P(1,35 \leqslant X_1 \leqslant 1,65) &= 2*P(1,5 \leqslant X_1 \leqslant 1,65) \\ &= 2*(P(X_1 \leqslant 1,65)-P(X_1<1,5)) \\ &= 2*(P(X_1<1,65)-0,5) \end{aligned}$$

Donc $P(1,35 \leqslant X_1 \leqslant 1,65)=0,980 \Leftrightarrow P(X_1 \leqslant 1,65)=\frac{0,980}{2}+0,5=0,990$

Donc, en passant en loi normale centrée réduite, on a

$$P\left(\frac{X_1-1,5}{\sigma_1} \leqslant \frac{1,65-1,5}{\sigma_1}\right)=0,990$$

En utilisant la fonctionnalité *FracNormale(p,0,1)* de la calculatrice, on peut retrouver la valeur de $\frac{1,65-1,5}{\sigma_1}$.

On trouve $\frac{1,65-1,5}{\sigma_1}=2,326$

Donc $\boxed{\sigma_1=\frac{1,65-1,5}{2,326}=0,064}$

2. a.

On cherche l'intervalle de fluctuation à 95 % qui concerne la proportion de tubes non « conformes pour la longueur » dans un échantillon de 250 tubes. On vérifie d'abord les premières hypothèses nécessaires à l'utilisation d'un intervalle de fluctuation :

$n=250 \geqslant 30$
$np=250*0,02=5 \geqslant 5$
$n(1-p)=250*0,98=245 \geqslant 5$

Ainsi, on peut maintenant écrire notre intervalle de fluctuation à 95 %, on rappelle déjà que :

$$I=\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,02-1,96\frac{\sqrt{0,02*0,98}}{\sqrt{250}};0,02+1,96\frac{\sqrt{0,02*0,98}}{\sqrt{250}}\right]$$

Donc, cela donne :

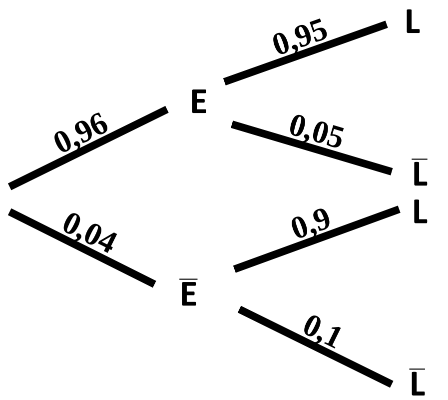
$\boxed{I=[0,003;0,037]}$.

2. b.

Ici, on a eu une erreur de $\frac{10}{250}=0{,}04$. On est en dehors de l'intervalle de fluctuation à 95 %, il est donc préférable de réviser la machine.

<u>Partie B</u>

1.



$P(E)=0{,}96$ « car 96 % des tubes de type 2 ont une épaisseur conforme ».

$P_E(L)=0{,}95$ car « parmi les tubes de type 2 qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme ».

$P_{\bar{E}}(L)=\frac{P(L\cap\bar{E})}{P(\bar{E})}=\frac{0{,}036}{0{,}04}=0{,}9$ car « 3,6 % des tubes de type 2 ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

2.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(L)=P(L\cap E)+P(L\cap\bar{E})$ car {E, $\bar{\text{E}}$} forme un système complet d'événements.

Donc $P(L)=P(E)P_E(L)+P(\bar{E})P_{\bar{E}}(L)$ avec la formule des probabilités conditionnelles.

Ce qui donne $\boxed{P(L)=0{,}96*0{,}95+0{,}04*0{,}9=0{,}948}$.

EXERCICE 2 (4 points)

1.

$z-i=i(z+1) \Leftrightarrow z(1-i)=2i \Leftrightarrow z=\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i+2i^2}{1-i+i-i^2}=\frac{2i-2}{2}=i-1$ est l'unique solution de l'équation donnée.

Or, $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})=1+i\neq 1-i$

Donc, $\boxed{\text{l'affirmation 1 est FAUSSE.}}$

2.

On cherche la forme exponentielle de $1+e^{2ix}$. On a :

$$\begin{aligned} 1+e^{2ix} &= e^{ix}(e^{-ix}+e^{ix}) \\ &= e^{ix}(\cos(x)-i\sin(x)+\cos(x)+i\sin(x)) \\ &= 2\cos(x)e^{ix}\neq 2\cos(x)e^{-ix} \end{aligned}$$

La forme exponentielle d'un complexe étant unique, $\boxed{\text{l'affirmation 2 est FAUSSE.}}$

3.

Soit M d'affixe z tel que $|z-i|=|z+1|$. On a :

$$\begin{aligned} |x+i(y-1)|=|x+1+iy| &\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+y^2} \\ &\Rightarrow x^2+y^2-2y+1=x^2+2x+1+y^2 \quad \text{(par bijection de la fonction racine carrée)} \\ &\Rightarrow -2y+1=2x+1 \\ &\Rightarrow x=-y \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{l'affirmation 3 est VRAIE.}}$

4.

Soit $z^5+z-i+1=0$. Supposons que z soit réel, c'est à dire que sa partie imaginaire soit nulle. Alors, on aurait $z^5+z+1=i$.

Or, si z est réel, z^5 l'est aussi, 1 également, et une somme de réels est réelle. Donc l'égalité précédente est impossible, car i est un imaginaire.

Donc $\boxed{\text{l'affirmation 4 est FAUSSE.}}$

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

1.

On rappelle que $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$.

Ainsi, $f'(x)=1-\frac{1}{x+1}$, et $\frac{1}{x+1}\leqslant 1$ pour tout $x\in[0;+\infty[$.

Donc $f'(x)=1-\frac{1}{x+1}\geqslant 0$ pour tout $x\in[0;+\infty[$.

Donc $\boxed{\text{f est croissante sur } [0;+\infty[}$.

2.

De plus, $f(0)=0$, alors pour tout $x\in[0;+\infty[$, $f(x)\geqslant 0$ car f est croissante.

Donc $\boxed{\ln(x+1)\leqslant x \text{ pour tout } x\in[0;+\infty[}$.

Partie B

1.

$u_2=u_1-\ln(1+u_1)=(u_0-\ln(1+u_0))-\ln(1+(u_0-\ln(1+u_0)))$

Cela donne $\boxed{u_2=(1-\ln(1+1))-\ln(1+(1-\ln(1+1)))=0{,}039}$

2. a.

On va suivre un raisonnement par récurrence.

Initialisation :

$u_0=1\geqslant 0$

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n\geqslant 0$.

D'après la question **1.**, on a $u_n-\ln(u_n+1)\geqslant 0$, donc $u_{n+1}\geqslant 0$: hypothèse vérifiée au rang n+1.

Conclusion :

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel n, } u_n\geqslant 0}$

2. b.

D'après la question précédente, on a $1+u_n\geqslant 1$, donc $-\ln(1+u_n)\leqslant 0$ car la fonction ln est croissante.

Ainsi, $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$ et $u_{n+1}\leqslant u_n$: $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

Donc, comme $u_0=1$, alors $\boxed{u_n\leqslant 1 \text{ pour tout entier naturel n.}}$

2. c.
(u_n) est décroissante, donc soit elle tend vers une limite finie soit vers $-\infty$. Or, (u_n) est minorée par 0, donc nécessairement, $\boxed{(p_n) \text{ est convergente.}}$

3.
On nous dit que si l est la limite de la suite (u_n), alors $f(l)=l$, i.e. $l-\ln(l+1)=l$
On a donc $\ln(l+1)=0$, donc $\boxed{l=0}$.

4. a.
N ← 0 (On entre les valeurs initiales)
uN ← 1
Tant que uN ≥ 10^{-p} : (Tant que la suite n'est pas inférieure à 10^{-p}, on continue)
  N ← N+1 (On met à jour la valeur de N)
  uN ← uN – ln(1 + uN) (On met à jour la valeur de u_N)
Fin Tant que

4. b.
On exécute ce programme à la calculatrice, on obtient $\boxed{n=6}$.
Remarque : Il se peut que votre calculatrice ait des difficultés à exécuter ce programme et qu'elle affiche un résultat négatif dès n=5 à cause des erreurs d'arrondis. C'est un défaut de conception de ce sujet. Pour ne pas pénaliser les candidats, toutes les réponses à cette question ont très probablement été acceptés par les correcteurs.

EXERCICE 4 spécialité (5 points)

1. a.
On a T : $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\24\end{pmatrix}$
Or $10\equiv0[5]$ et $24\equiv4[5]$
Donc $\begin{pmatrix}10\\24\end{pmatrix}$ est congrue à $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$: $\boxed{\text{il s'agit bien de la lettre U.}}$
Ensuite, on a E : $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$
Or $4\equiv4[5]$ et $12\equiv2[5]$
Donc $\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$ est congrue à $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$: il s'agit de la lettre O.
$\boxed{\text{Ainsi, « TE » devient « UO » une fois codé.}}$

1. b.

$$PM=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&10\\10&16\end{pmatrix}$$

Or $6\equiv 1[5]$, $10\equiv 0[5]$ et $16\equiv 1[5]$

Donc PM est bien congrue à $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

1. c.

On note $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ et $A'=\begin{pmatrix}a'_{11}&a'_{12}\\a'_{21}&a'_{22}\end{pmatrix}$ les deux matrices congrues modulo 5. On a :

$$AZ=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xa_{11}+ya_{12}\\xa_{21}+ya_{22}\end{pmatrix} \text{ et } A'Z'=\begin{pmatrix}a'_{11}&a'_{12}\\a'_{21}&a'_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'a'_{11}+y'a'_{12}\\x'a'_{21}+y'a'_{22}\end{pmatrix}$$

Donc, comme on a bien :

$$xa_{11}+ya_{12}\equiv x'a'_{11}+y'a'_{12}[5]$$
$$xa_{21}+ya_{22}\equiv x'a'_{21}+y'a'_{22}[5]$$

Alors AZ et A'Z' sont bien congrus modulo 5.

1. d.

Soient MX et Y congrues modulo 5. Alors PMX et PY sont congrues modulo 5 d'après la question **1. c)**. Puis, PM et I_2 sont congrues modulo 5 d'après la question **1. b)**, donc PMX et $I_2X=X$ sont congrues modulo 5 d'après la question **1. c)**. Finalement, X et PY sont donc bien congrues modulo 5.

1. e.

On a D : $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$.

Or $9\equiv 4[5]$ et $12\equiv 2[5]$

Donc $\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$ est congrue à $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$: il s'agit de la lettre O qui avait été codée.

2. a.

$$RS=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&10\\20&20\end{pmatrix}$$

Or $10\equiv 0[5]$ et $20\equiv 0[5]$

Donc RS est bien congrue à $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2. b.

Si TR et I_2 sont congrues modulo 5, alors, comme expliqué question **1. d)**, vu que S est congrue à elle-même modulo 5, alors TRS et $I_2S=S$ sont congrues modulo 5.
Donc si c'est le cas, on aurait bien TRS et S qui seraient congrues modulo 5.

2. c.

On suppose qu'il existe T telle que TR et I_2 soient congrues modulo 5. Alors TRS et S sont congrues modulo 5. Mais RS et la matrice nulle sont congrues modulo 5. Alors TRS est congrue à la matrice nulle modulo 5. Donc S est congrue à la matrice nulle modulo 5 : c'est absurde, car ça n'est pas le cas.

Conclusion : il n'existe pas de matrice T telle que TR et I_2 soient congrues modulo 5, donc on $\boxed{\text{en déduit qu'un message codé par R ne peut pas être décodé.}}$