BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de spécialité – Coefficient 9

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

Exercice 1 : Commun à tous les candidats (5 points)

Dans cet exercice et sauf mention contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Une usine fabrique des tubes.

Partie A

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

On s'intéresse à deux types de tubes, appelés tubes de type 1 et tubes de type 2.

1. Un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre 1,35 millimètres et 1,65 millimètres.

a. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.

On prélève au hasard un tube de type 1 dans la production de la journée. Calculer la probabilité que le tube soit accepté au contrôle.

b. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes de type 1. Pour cela, on modifie le réglage des machines produisant ces tubes. On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé dans la production issue de la machine modifiée, associe son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type σ_1.

Un tube de type 1 est prélevé au hasard dans la production issue de la machine modifiée. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_1 pour que la probabilité que ce tube soit accepté au contrôle soit égale à 0,98. (On pourra utiliser la variable aléatoire Z définie par $Z = \frac{X_1 - 1,5}{\sigma_1}$ qui suit la loi normale centrée réduite.)

2. Une machine produit des tubes de type 2. Un tube de type 2 est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci, en millimètres, appartient à l'intervalle [298 ; 302]. Le cahier des charges établit que, dans la production de tubes de type 2, une proportion de 2 % de tubes non «conformes pour la longueur » est acceptable.

On souhaite décider si la machine de production doit être révisée. Pour cela, on prélève au hasard dans la production de tubes de type 2 un échantillon de 250 tubes dans lequel 10 tubes se révèlent être non « conformes pour la longueur ».

a. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non « conformes pour la longueur » dans un échantillon de 250 tubes.

b. Décide-t-on de réviser la machine ? Justifier la réponse.

Partie B

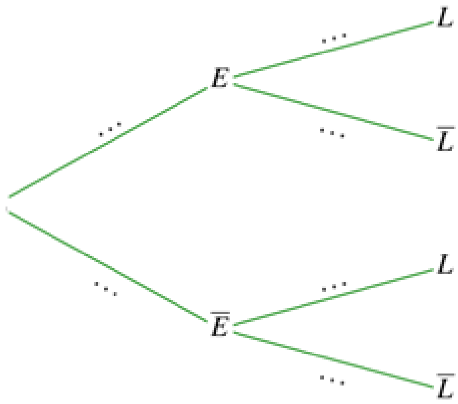
Des erreurs de réglage dans la chaîne de production peuvent affecter l'épaisseur ou la longueur des tubes de type 2. Une étude menée sur la production a permis de constater que :

- 96 % des tubes de type 2 ont une épaisseur conforme ;
- parmi les tubes de type 2 qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme ;
- 3,6 % des tubes de type 2 ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

On choisit un tube de type 2 au hasard dans la production et on considère les événements :

- E : « l'épaisseur du tube est conforme » ;
- L : « la longueur du tube est conforme ».

On modélise l'expérience aléatoire par un arbre pondéré :



1. Recopier et compléter entièrement cet arbre.

2. Montrer que la probabilité de l'événement L est égale à 0,948.

Exercice 2 : Commun à tous les candidats (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : L'équation $z - \mathrm{i} = \mathrm{i}(z+1)$ a pour solution $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Affirmation 2 : Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.

Affirmation 3 : Un point M d'affixe z tel que $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Affirmation 4 : L'équation $z^5 + z - \mathrm{i} + 1 = 0$ admet une solution réelle.

Exercice 3 : Commun à tous les candidats (6 points)

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $\ln(x+1) \leq x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 1$.

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. On note l la limite de la suite (u_n) et on admet que $l = f(l)$ où f est la fonction définie dans la partie A. En déduire la valeur de l.

4. **a**. Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.

b. Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15} .

Exercice 4 : Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Deux matrices colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si $\begin{cases} x \equiv x'[5] \\ y \equiv y'[5] \end{cases}$.

Deux matrices carrées d'ordre 2 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si $\begin{cases} a \equiv a'[5] \\ b \equiv b'[5] \\ c \equiv c'[5] \\ d \equiv d'[5] \end{cases}$.

Alice et Bob veulent s'échanger des messages en utilisant la procédure décrite ci-dessous.

- Ils choisissent une matrice M carrées d'ordre 2, à coefficients entiers.
- Leur message initial est écrit en lettres majuscules sans accent.
- Chaque lettre de ce message est remplacée par une matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ déduite du tableau ci-contre : x est le chiffre situé en haut de la colonne et y est le chiffre situé à la gauche de la ligne ; par exemple, la lettre T d'un message initial correspond à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- On calcule une nouvelle matrice $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en multipliant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à gauche par la matrice M : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- On calcule r'et t' les restes respectifs des divisions euclidiennes de x' et y' par 5.
- On utilise le tableau ci-contre pour obtenir la nouvelle lettre correspondant à la matrice colonne $\begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix}$.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	A	B	C	D	E
1	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O
3	P	Q	R	S	T
4	U	V	X	Y	Z

Remarque : la lettre W est remplacée par les deux lettres accolées V ;

1. Bob et Alice choisissent la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que la lettre « T » du message initial est codée par la lettre « U » puis coder le message « TE ».

b. On pose $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que les matrices PM et I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

c. On considère A, A' deux matrices d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers congrues modulo 5. Montrer alors que les matrices AZ et A'Z' sont congrues modulo 5.

Dans ce qui suit, on admet que si A, A' sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et si B, B' sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 alors les matrices produits AB et A'B' sont congrues modulo 5.

d. On note $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers. Déduire des deux questions précédentes que si MX et Y sont congrues modulo 5 alors les matrices X et PY sont congrues modulo 5 ; ce qui permet de « décoder » une lettre chiffrée par la procédure utilisée par Alice et Bob avec la matrice M choisie.

e. Décoder alors la lettre « D ».

2. On souhaite déterminer si la matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ peut être utilisée pour coder un message.

a. On pose $S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que la matrice RS et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

b. On admet qu'un message codé par la matrice R peut être décodé s'il existe une matrice T telle que les matrices TR et I soient congrues modulo 5. Montrer que si c'est le cas alors les matrices TRS et S sont congrues modulo 5 (par la procédure expliquée en question 1.d pour le codage avec la matrice M).

c. En déduire qu'un message codé par la matrice R ne peut être décodé.