

Baccalauréat S

Session 2019 Antilles Guyane - Mathématiques

Document sous license Art Libre (<http://artlibre.org>)

Proposition de corrigé par Thomas Harbreteau. Pour toute question ou remarque éventuelle, vous pouvez me contacter à l'adresse mail suivante : tharbreteau@protonmail.com.

Exercice n° 1 *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. Le point $A(0; 0,5)$ appartient à \mathcal{C}_f , la courbe représentative de la fonction f , donc $f(0) = 0,5$, soit $a/(1+e^0) = 0,5$, d'où $a = 0,5 \times (1+e^0) = 0,5 \times 2 = 1$.

2. *Remarque : Justifions la dérivabilité de f . Notons $u : x \mapsto 1 + e^{-bx}$, définie et dérivable sur \mathbf{R}_+ . Par positivité de la fonction exponentielle sur \mathbf{R}_+ , pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $u(x) \geq 1 > 0$. De plus, $f = 1/u$ donc par opérations, f est définie et dérivable sur \mathbf{R}_+ .*

La formule de dérivation d'un quotient de deux fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas permet d'écrire que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{-be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2} = \frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}.$$

3. La fonction f étant dérivable en 0, le coefficient directeur de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 0, donc en A , est égal à $f'(0)$ par définition du nombre dérivé. D'après 2, $f'(0) = be^0/(1+e^0)^2 = b/2^2 = b/4$. De plus, cette tangente passe par les points $A(0; 0,5)$ et $B(10; 1)$. Son coefficient directeur est donc aussi égal au taux d'accroissement entre ces deux points, soit $(1 - 0,5)/(10 - 0) = 0,5/10 = 0,05$. Par conséquent, $b/4 = 0,05$, d'où $b = 0,2$.

Partie B

1. La proportion d'individus équipés au 1^{er} janvier 2010 est $p(10) = 1/(1+e^{-0,2 \times 10}) \simeq 0,68$.

2. (a) Remarquons que $p = f$, où f est la fonction définie en **Partie A**. D'après **Partie A, 2**, pour tout $x \geq 0$, $p'(x) = 0,2e^{-0,2x}/(1+e^{-0,2x})^2$. Les fonctions $x \mapsto 0,2e^{-0,2x}$ et $x \mapsto (1+e^{-0,2x})^2$ étant strictement positives sur \mathbf{R}_+ , p' l'est aussi donc p est strictement croissante sur \mathbf{R}_+ .

(b) Comme $-0,2x \xrightarrow{(x \rightarrow +\infty)} -\infty$, par continuité de la fonction exponentielle sur \mathbf{R} , $e^{-0,2x} \xrightarrow{(x \rightarrow +\infty)} 0$. Par opérations sur les limites, $p(x) \xrightarrow{(x \rightarrow +\infty)} 1/1 = 1$.

(c) Cette limite signifie qu'au bout d'un certain temps, presque tous les individus de la population seront équipés.

3. Cherchons le plus petit $x \geq 0$ vérifiant $p(x) \geq 0,95$. Soit $x \geq 0$,

$$p(x) \geq 0,95 \iff \frac{1}{1+e^{-0,2x}} \geq 0,95 = \frac{95}{100}$$

et par positivité de la fonction exponentielle sur \mathbf{R}_+ , $1+e^{-0,2x} > 0$. On a donc

$$\frac{1}{1+e^{-0,2x}} \geq \frac{95}{100} \iff \frac{100}{95} \geq 1+e^{-0,2x} \iff \frac{5}{95} \geq e^{-0,2x} \iff \frac{1}{19} \geq e^{-0,2x}.$$

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur \mathbf{R}_+^* , comme $1/19$ et $e^{-0,2x}$ sont strictement positifs, appliquer cette fonction à l'inégalité précédente ne change pas son sens, d'où

$$\frac{1}{19} \geq e^{-0,2x} \iff \ln\left(\frac{1}{19}\right) \geq -0,2x \iff -\ln 19 \geq -0,2x \iff \ln 19 \leq 0,2x \iff 5 \ln(19) \leq x.$$

Le réel recherché est donc $x = 5 \ln(19) \simeq 14,7$. Il y a 12 mois dans une année, donc 0,7 mois correspondent à $0,7 \times 12 = 8,4$ mois, et le huitième mois de l'année est août. La proportion d'individus équipés dépassera donc 95% au milieu du mois d'août 2014 environ.

4. (a) Pour tout $x \geq 0$, $e^{-0,2x} = 1/e^{0,2x}$, d'où

$$\forall x \geq 0, \quad p(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{0,2x}}} = \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x} + 1}.$$

(b) Notons $v : x \mapsto 1 + e^{0,2x}$, définie, strictement positive sur \mathbf{R}_+ par stricte positivité de l'exponentielle, et dérivable sur \mathbf{R}_+ , avec

$$\forall x \geq 0, \quad v'(x) = 0,2e^{0,2x} > 0.$$

On en déduit que $p = 5v'/v$, donc une primitive de p sur \mathbf{R}_+ est $5 \ln |v| = 5 \ln v$, qui est la fonction $x \mapsto 5 \ln(1 + e^{0,2x})$.

(c) La fonction $x \mapsto 5 \ln(1 + e^{0,2x})$ est d'après 4.c une primitive de p sur \mathbf{R}_+ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$m = \frac{1}{2} \int_8^{10} p(x) dx = \frac{1}{2} [5 \ln(1 + e^{0,2x})]_8^{10} = \frac{5}{2} [\ln(1 + e^2) - \ln(1 + e^{1,6})] \simeq 0,86.$$

Exercice n° 2 *Commun à tous les candidats*

Partie A Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} = (2 - 2; 6 - 4; 0,75 - 0,25) = (0; 2; 0,25)$ et (AB) passe par $A(2; 4; 0,25)$. On en déduit qu'une représentation paramétrique de (AB) est

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2t + 4 \\ z = 0,5t + 0,25. \end{cases}$$

2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{PQ} = (0 - 0; 11 - 10; 1 - 0) = (0; 1; 1)$ et $\overrightarrow{PU} = (10 - 0; 10 - 10; 0 - 0) = (10; 0; 0)$ ne sont pas colinéaires, donc sont deux vecteurs directeurs du plan (PQU) . Comme

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0 \\ \overrightarrow{PU} \cdot \vec{n} = 0 \times 10 + 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0, \end{cases}$$

le vecteur $\vec{n}(0; 1; -1)$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs de (PQU) , donc est normal à ce plan.

(b) D'après 1, le vecteur $\vec{n}(0; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (PQU) donc une équation cartésienne de ce plan est de la forme

$$0 \times x + 1 \times y + (-1) \times z + a = 0, \quad \text{soit} \quad y - z + a = 0,$$

où a est un réel à déterminer. Comme le point $P(0; 10; 0)$ appartient au plan (PQU) , ses coordonnées vérifient cette équation cartésienne, donc

$$10 - 0 + a = 0, \quad \text{d'où} \quad a = -10.$$

Une équation cartésienne de (PQU) est donc $y - z - 10 = 0$.

3. Supposons qu'il existe un point d'intersection entre (AB) et (PQU) , noté I . Comme $I \in (AB)$, d'après la représentation paramétrique de (AB) établie en 1, il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que les coordonnées de I soient $(2; 2t + 4; 0,5t + 0,25)$. Mais $I \in (PQU)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan établie en 2.b, d'où

$$2t + 4 - (0,5t + 0,25) - 10 = 0, \quad \text{soit} \quad 1,5t - 6,25 = 0,$$

donc $3t/2 = 25/4$, d'où $t = 2 \times 25/(4 \times 3) = 25/6$. Les coordonnées de I sont donc $(2; 2 \times 25/6 + 4; 0,5 \times 25/6 + 0,25) = (2; 25/3 + 4; 25/12 + 1/4) = (2; 37/3; 28/12) = (2; 37/3; 7/3)$.

Réciproquement, le point $I(2; 37/3; 7/3)$ appartient bien à (AB) , c'est le point de paramètre $25/6$, et ses coordonnées vérifient bien l'équation cartésienne de (PQU) .

Il existe bien un unique point d'intersection entre (AB) et (PQU) , dont les coordonnées sont $(2; 37/3; 7/3)$.

4. L'obstacle est le rectangle $PQTU$, inclus dans le plan (PQU) donc la trajectoire (AB) du drone d'Alex rencontre l'obstacle si et seulement si il existe un point d'intersection entre (AB) et (PQU) situé dans le rectangle $PQTU$. D'après 3, il existe un unique point d'intersection entre ces deux éléments, noté I , de coordonnées $(2; 37/3; 7/3)$. Mais la coordonnée z des points de $PQTU$ varie entre 0 et 1 (la hauteur la plus basse étant au niveau des points P et U , et celle la plus haute au niveau des points Q et T), tandis que celle de I est $7/3 > 1$, donc l'unique point d'intersection entre (AB) et (PQU) n'est pas dans $PQTU$. Ceci montre que la trajectoire du drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B Distance minimale entre les deux trajectoires

1. On décompose le vecteur \overrightarrow{MN} à l'aide de la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = -a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{CD}.$$

En **Partie A, 1**, on a montré que $\overrightarrow{AB} = (0; 2; 0, 5)$ et on calcule que $\overrightarrow{AC} = (4 - 2; 6 - 4; 0, 25 - 0, 25) = (2; 2; 0)$ ainsi que $\overrightarrow{CD} = (2 - 4; 6 - 6; 0, 25 - 0, 25) = (-2; 0; 0)$. Par conséquent, $\overrightarrow{MN} = (2 - 2b; 2 - 2a; -0, 5a)$.

2. *Remarque : Le premier résultat admis montre que les droites (AB) et (CD) n'ont pas de point d'intersection, et donc que trouver la distance minimale MN est plus compliqué que simplement chercher un tel point. Le deuxième résultat permet alors d'indiquer au candidat le raisonnement à suivre pour répondre à la question.*

Remarque bis : Cela fait beaucoup de résultats admis, le premier est un simple calcul mais le deuxième aurait pu faire l'objet de plusieurs questions, voire d'une partie. Les démonstrations de ces deux résultats se trouvent annexe en toute fin de document, la deuxième est intéressante, mais difficile, surtout si elle n'est pas guidée.

Les vecteurs \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} étant des vecteurs directeurs respectifs de (MN) , (AB) et (CD) , d'après le deuxième résultat admis, la distance MN est minimale si \overrightarrow{MN} est orthogonal à \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} . Soient a et b , deux réels.

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (2 - 2a) \times 2 + (-0, 5a) \times 0, 5 = 0 \\ -2(2 - 2b) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 - 4, 25a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{4}{4, 25} = \frac{4}{17} = \frac{16}{17} \\ b = 1. \end{cases}$$

La distance MN est donc minimale si $a = 16/17$ et $b = 1$.

3. D'après 2, la distance MN est minimale lorsque $a = 16/17$ et $b = 1$. Dans ce cas,

$$MN = \sqrt{(2 - 2 \times 1)^2 + \left(2 - 2 \frac{16}{17}\right)^2 + \left(-0, 5 \frac{16}{17}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 + 64}{17^2}} = \frac{\sqrt{68}}{17} = \frac{\sqrt{4 \times 17}}{17} = \frac{2}{\sqrt{17}}.$$

Cette distance correspond à $2/\sqrt{17} \times 10 \simeq 4, 9\text{m}$, donc la distance minimale de 4m voulue par l'énoncé est respectée.

Exercice n° 3 Commun à tous les candidats

1. Mettons c sous forme algébrique :

$$c = \frac{1}{2}e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

L'affirmation 1 est donc fausse.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$, $c^{3n} = e^{i3\pi n/3}/2^{3n} = e^{i\pi n}/8^n = (-1)^n/8^n \in \mathbf{R}$, l'affirmation 2 est bien vraie.

3. L'affixe du vecteur \overrightarrow{OS} est

$$z_{\overrightarrow{OS}} = z_S - z_O = c^2 - 0 = c^2 = \frac{1}{4}e^{i2\pi/3}$$

et celle du vecteur \overrightarrow{OT} est

$$z_{\overrightarrow{OT}} = z_T - z_O = \frac{1}{c} - 0 = \frac{1}{c} = 2e^{-i\pi/3}.$$

Comme $-e^{i\pi} = 1$, $e^{-i\pi/3} = -e^{i\pi}e^{-i\pi/3} = -e^{2i\pi/3}$, d'où $z_{\overrightarrow{OT}} = -2e^{2i\pi/3} = -8z_{\overrightarrow{OS}}$. Les vecteurs \overrightarrow{OS} et \overrightarrow{OT} sont donc colinéaires, donc les points O , S et T sont alignés. De ce fait, l'affirmation 3 est vraie.

4. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $|c^k| = |c|^k = |e^{i\pi/3}/2|^k = 1/2^k$. Notons pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $u_k = 1/2^k$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $|c| + |c^2| + \dots + |c^n| = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ et on reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme $u_1 = 1/2$. La formule de sommation géométrique montre que

$$|c| + \dots + |c^n| = u_1 + \dots + u_n = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ceci montre que l'affirmation 4 est vraie.

Exercice n° 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1} \cap B_n) + \mathbf{P}(A_{n+1} \cap C_n) \\ &= \mathbf{P}(A_{n+1} | A_n)\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1} | B_n)\mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}(A_{n+1} | C_n)\mathbf{P}(C_n). \end{aligned}$$

De plus, l'énoncé indique que :

- Si le temps est ensoleillé au jour n , la probabilité qu'il le soit au jour $n + 1$ est $0,5$, donc $\mathbf{P}(A_{n+1} | A_n) = 0,5$.
 - Si le temps est nuageux sans pluie au jour n , la probabilité qu'il le soit le lendemain est $0,2$ et qu'il soit pluvieux est $0,7$, donc $\mathbf{P}(B_{n+1} | B_n) = 0,2$ et $\mathbf{P}(C_{n+1} | B_n) = 0,7$. Comme $\mathbf{P}(A_{n+1} | B_n) + \mathbf{P}(B_{n+1} | B_n) + \mathbf{P}(C_{n+1} | B_n) = 1$, on a $\mathbf{P}(A_{n+1} | B_n) = 1 - 0,2 - 0,7 = 0,1$.
 - Si le temps est pluvieux au jour n , la probabilité qu'il soit ensoleillé au jour $n + 1$ est $0,2$, d'où $\mathbf{P}(A_{n+1} | C_n) = 0,2$.
- On en déduit que $\mathbf{P}(A_{n+1}) = 0,5\mathbf{P}(A_n) + 0,1\mathbf{P}(B_n) + 0,2\mathbf{P}(C_n)$, d'où $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n$.

(b) Soit $n \in \mathbf{N}$, comme $a_n + b_n + c_n = 1$, en multipliant cette équation par $0,2$ on obtient que $0,2c_n = 0,2 - 0,2a_n - 0,2b_n$. En remplaçant c_n par cette expression dans la relation établie en 1.a, on trouve que

$$a_{n+1} = (0,5 - 0,2)a_n + (0,1 - 0,2)b_n + 0,2 = 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2.$$

2. (a) Remarque : L'expression des b_n admise peut-être trouvée en refaisant exactement les questions 1.a et 1.b, mais avec la suite (b_n) .

Soit $n \in \mathbf{N}$, par produit matriciel,

$$MU_n + R = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3a_n - 0,1b_n \\ 0,2a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2 \\ 0,2a_n + 0,2 \end{pmatrix}.$$

D'après la relation admise et 1.b,

$$MU_n + R = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

(b) Le calcul fait en 2.a montre que

$$Y = MY + R \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3\alpha - 0,1\beta + 0,2 \\ 0,2\alpha + 0,2 \end{pmatrix}.$$

Deux matrices étant égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3\alpha - 0,1\beta + 0,2 \\ 0,2\alpha + 0,2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = 0,3\alpha - 0,1\beta + 0,2 \\ \beta = 0,2\alpha + 0,2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,7\alpha = -0,1\beta + 0,2 \\ \beta = 0,2\alpha + 0,2 \end{cases}$$

et en soustrayant la deuxième ligne à 10 fois la première, on obtient

$$\begin{cases} 0,7\alpha = -0,1\beta + 0,2 \\ \beta = 0,2\alpha + 0,2 \end{cases} \iff \begin{cases} 7,2\alpha = 1,8 \\ \beta = 0,2(\alpha + 1) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{36}{5}\alpha = \frac{9}{5} \\ \beta = 0,2(\alpha + 1) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \\ \beta = 0,2\left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{1}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

3. (a) D'après 2.a et 2.b,

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, & U_{n+1} = MU_n + R \\ Y = MY + R \end{cases},$$

donc en soustrayant la deuxième ligne à la première, on obtient que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad V_{n+1} = MV_n$.

(b) Notons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(H_n) : "V_n = M^n V_0"$.

- Comme $M^0 = I_2$, on a bien $V_0 = M^0 V_0$, donc (H_0) est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$, d'après **2.a**, $V_{n+1} = M V_n$ donc d'après (H_n) , $V_{n+1} = M M^n V_0 = M^{n+1} V_0$, donc (H_{n+1}) est vraie.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $V_n = M^n V_0$.

4. (a) *Remarque : L'expression des M^n admise se démontre par récurrence.*

Comme $V_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'après **3.b**, d'après **3.b**,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad V_n = M^n V_0 = \begin{pmatrix} 2 \times 0, 2^n - 0, 1^n & 0, 1^n - 0, 2^n \\ 2 \times 0, 2^n - 2 \times 0, 1^n & 2 \times 0, 1^n - 0, 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 0, 2^n - 0, 1^n \\ 2 \times 0, 2^n - 2 \times 0, 1^n \end{pmatrix}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $V_n = U_n - Y$ et que a_n est le coefficient du haut de U_n , on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = 2 \times 0, 2^n - 0, 1^n + 0, 25.$$

(b) Étant donné que $-1 < 0, 2 < 1$ et $-1 < 0, 1 < 1$ donc les suites géométriques de raison $0, 2$ et $0, 1$ ont une limite nulle. En passant à la limite dans l'expression de **4.a**, on trouve que $a_n \rightarrow_{(n \rightarrow +\infty)} 0, 25$.

5. *Remarque : L'expression des c_n admise se trouve en exprimant les b_n en fonction de n comme on l'a fait pour les a_n en **4.b**, puis en utilisant la relation $a_n + b_n + c_n = 1$ valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

Comme $0, 1 < 0, 2$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0, 1^n < 0, 2^n$. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0, 1^n > 0$ donc $c_n \leq 0, 5 + 3, 5 \times 0, 1^n - 3, 5 \times 0, 2^n = 0, 5 \times 3, 5(0, 1^n - 0, 2^n)$, ce qui montre que $c_n \leq 0, 5$. La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours ne peut pas dépasser $0, 5$.

Annexe pour les curieux (non demandé dans le sujet) : démonstration des résultats admis de l'exercice n° 2, Partie B, question 2

Commençons par montrer que (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On rappelle que l'on a montré en **1** que $\overrightarrow{AB} = (0; 2; 0, 5)$ et que $\overrightarrow{CD} = (-2; 0; 0)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, et sont des vecteurs directeurs respectifs de (AB) et de (CD) , donc ces droites ne sont pas parallèles. De plus, comme (CD) passe par $C(4; 6; 0, 26)$, une représentation paramétrique de (CD) est

$$\begin{cases} x = -2t + 4 \\ y = 6 \\ z = 0, 25 \end{cases},$$

et on a montré en **Partie A, 1** qu'une représentation paramétrique de (AB) est

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2t' + 4 \\ z = 0, 5t' + 0, 25 \end{cases}.$$

Supposons qu'il existe un point d'intersection entre ces deux droites, noté I . Comme $I \in (AB)$, il existe $t' \in \mathbf{R}$ tel que ses coordonnées soient $(2; 2t' + 4; 0, 5t' + 0, 25)$. De plus, $I \in (CD)$ donc il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que ses coordonnées soient $(-2t + 4; 6; 0, 25)$. On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} 2 = -2t + 4 \\ 2t' + 4 = 6 \\ 0, 5t' + 0, 25 = 0, 25 \end{cases}, \quad \text{donc} \quad \begin{cases} t = 1 \\ 4 = 6 \\ t' = 0 \end{cases}.$$

C'est absurde, donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes, mais elles ne sont pas non plus parallèles, donc elles ne sont pas coplanaires.

Montrons le deuxième résultat. Dans toute la suite, on utilise les représentations paramétriques de (AB) et (CD) établies précédemment. Fixons R , un point de (AB) , et notons (x, y, z) ses coordonnées. Notons pour tout $t \in \mathbf{R}$, $S(t)$ le point de paramètre t de (CD) , donc de coordonnées $(-2t + 4; 6; 0, 25)$. On a alors

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad RS(t)^2 = (-2t + 4 - x)^2 + (6 - y)^2 + (0, 25 - z)^2.$$

Comme $(6 - y)^2$ et $(0, 25 - y)^2$ sont positifs,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad RS(t)^2 \geq (6 - y)^2 + (0, 25 - z)^2,$$

et si $t \in \mathbf{R}$,

$$RS(t)^2 = (6 - y)^2 + (0, 25 - z)^2 \iff -2t + 4 - x = 0 \iff t = 2 - \frac{x}{2}.$$

Par conséquent, la distance RS^2 atteint un minimum, qui vaut $(6 - y)^2 + (0, 25 - z)^2$, en $t_0 = 2 - x/2$ uniquement, et le point $S(t_0)$, de coordonnées $(-2(2 - x/2) + 4; 6; 0, 25) = (x; 6; 0, 25)$, est donc le point de (CD) le plus proche de R .

Notons maintenant pour tout $t \in \mathbf{R}$, $R(t)$ le point de paramètre t de (AB) , donc de coordonnées $(2; 2t + 4; 0, 5t + 0, 25)$. Ce qui précède montre que pour tout $t \in \mathbf{R}$, le point de (CD) le plus proche de $R(t)$ est le point de coordonnées $(2; 6; 0, 5)$ que l'on notera N . De plus, toujours d'après ce qui précède,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad R(t)N^2 = (6 - (2t + 4))^2 + (0, 25 - (0, 5t + 0, 25))^2 = (2 - 2t)^2 + 0, 25t^2.$$

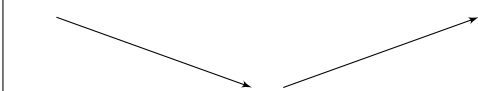
Notons $f : t \mapsto R(t)N^2 = (2 - 2t)^2 + 0, 25t^2$, définie et dérivable sur \mathbf{R} car polynomiale, avec

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f'(t) = -2 \times 2(2 - 2t) + 0, 5t = 8, 5t - 8.$$

Donc si $t \in \mathbf{R}$,

$$f'(t) > 0 \iff 8, 5t - 8 > 0 \iff t > \frac{8}{8, 5} = \frac{8}{17} = \frac{16}{17}, \quad \text{et} \quad f'(t) = 0 \iff t = \frac{16}{17}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$	$\frac{16}{17}$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$			

La fonction f atteint donc un minimum en $t_1 = 16/17$ uniquement, et donc la distance RN^2 , donc RN , atteint aussi un minimum quand R est de paramètre t_1 . Notons donc $M = R(t_1)$, de coordonnées $(2; 2 \times 16/17 + 4; 5 \times 16/17 + 0, 25) = (2; 32/17 + 4; 80/17 + 1/4) = (2; 100/17; 32/68 + 17/68) = (2; 100/17; 49/68)$. Ainsi, la distance MN est la plus petite distance entre deux points des droites (AB) et (CD) . Enfin, $\overrightarrow{MN} = (2 - 2; 6 - 100/17; 1/4 - 49/68) = (0; 2/17; -32/68) = (0; 2/17; -8/17)$, et

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + \frac{2}{17} \times 2 + 0, 5 \times \left(-\frac{8}{17}\right) = \frac{4}{17} - \frac{4}{17} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \times (-2) + \frac{2}{17} \times 0 + \left(-\frac{8}{17}\right) \times 0 = 0. \end{cases}$$

Lorsque la distance MN est minimale, (MN) est bien orthogonale à (AB) et à (CD) , et cette distance minimale est

$$MN = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{17}\right)^2 + \left(-\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{\sqrt{68}}{17} = \frac{2}{\sqrt{17}}.$$

Réciproquement, les calculs faits en **Partie B, 2** montrent que si (MN) est orthogonale à (AB) et à (CD) , alors $MN = 2/\sqrt{17}$, donc MN est minimale, ce qui prouve le résultat admis.

De plus, on a alors une équivalence : MN est minimale si et seulement si (MN) est orthogonale à (AB) et à (CD) .