Baccalauréat S

Session 2019 Centres Étrangers Afrique - Mathématiques spécialité

Proposition de corrigé par Thomas Harbreteau et complété par www.sujetdebac.fr. Pour toute question ou remarque éventuelle, vous pouvez me contacter à l'adresse mail suivante : tharbreteau@protonmail.com.

Exercice n° 1 *Commun à tous les candidats*

1. On considère l'expérience aléatoire "demander à un client s'il fait du surf", qui possède deux issues :

- le client fait du surf, de probabilité égale à $0,25$ d'après l'énoncé,
- le client ne fait pas de surf, de probabilité égale à $1 - 0,25 = 0,75$.

Il s'agit d'une expérience de Bernouilli, de paramètre $0,25$.

Interroger les 80 clients revient donc à répéter 80 fois cette expérience alétaoire, et on peut considérer ces répétitions indépendantes, le fait qu'un client fasse du surf étant indépendant du fait que son voisin en fasse, ou non. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de clients faisant du surf, alors X d'après ce que l'on vient de dire, X suit une loi binomiale de paramètres $(80; 0,25)$. On en déduit que

$$\mathbf{P}(X = 20) = \binom{80}{20} 0,25^{20}(1 - 0,25)^{80-20} = \binom{80}{20} 0,25^{20} \times 0,75^{60} \simeq 0,103.$$

La réponse **d)** est donc la bonne réponse.

2. Comme la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $\mu = 150$, on sait que :

$$\forall a > 0, \quad \mathbf{P}(X \geq \mu + a) = \mathbf{P}(X \leq \mu - a),$$

donc pour $a = 50$, $\mathbf{P}(X \geq 150 + 50) = \mathbf{P}(X \leq 150 - 50)$, soit $\mathbf{P}(X \geq 200) = \mathbf{P}(X \leq 100)$. De plus, $\mathbf{P}(X \geq 100) = 1 - \mathbf{P}(X < 100) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 100)$ car la loi normale est une loi de probabilité continue, d'où $\mathbf{P}(X \geq 100) = 1 - \mathbf{P}(X \geq 200) = 1 - 0,025 = 0,975$. La réponse **d)** est donc la bonne.

3. Notons $\lambda \in \mathbf{R}$ le paramètre de T, on sait que $\mathbf{E}(T) = 1/\lambda$, donc $\lambda = 1/5$. Enfin, T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, $\mathbf{P}(T \geq 5) = e^{-5\lambda} = e^{-1}$. La bonne réponse est donc **c)**.

4. Soit un échantillon de $n \in \mathbf{N}^*$ clients. Notons f la proportion de clients satisfaits observée dans cet échantillon. Un intervalle de confiance à 95% de la probabilité qu'un client soit satisfait est donc $[f - 1/\sqrt{n}; f + 1/\sqrt{n}]$, donc sa longueur est égale à $f + 1/\sqrt{n} - (f - 1/\sqrt{n}) = 2/\sqrt{n}$. On cherche donc n tel que $2/\sqrt{n} = 0,04$, soit $n = (2/0,04)^2 = 2500$. La réponse **b)** est la bonne.

Exercice n° 2 *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. Si $u_1 = 0$,

- $u_2 = (1 + 1)u_1 - 1 = 2 \times 0 - 1 = -1$,
- $u_3 = (2 + 1)u_2 - 1 = 3 \times (-1) - 1 = -4$,
- $u_4 = (3 + 1)u_3 - 1 = 4 \times (-4) - 1 = -17$.

2. En entrée du premier tour de boucle, $N = 1$ et $U = u_1$, et on souhaite calculer u_2. La variable U va donc prendre la valeur $(N + 1)U - 1$, ce qui conduit à l'écriture du code suivante :

```
Pour N allant de 1 à 12
    U <- (N+1)*U - 1
Fin Pour
```

3. Si $u_1 = 0,7$, la suite (u_n) semble tendre vers $-\infty$. Si $u_1 = 0,8$, la suite (u_n) semble tendre vers $+\infty$.

Partie B

1. Les fonctions $u : x \mapsto -1-x$ et $v : x \mapsto 1-x$ sont définies et dérivables sur $[0,1]$ et on a $F = u \times e^v$. Par opérations, F est dérivable sur $[0,1]$ et par formule de dérivation d'un produit,

$$F' = u'e^v + u \times (e^v)'.$$

Par formule de dérivation de la fonction composée e^v,

$$F' = u'e^v + u \times v' \times e^v,$$

donc : $\forall x \in [0,1], \quad F'(x) = -e^{1-x} + (-1-x)(-e^{1-x}) = (-1+1+x)e^{1-x} = xe^{1-x} = f(x)$. La fonction F est donc bien une primitive de f sur $[0,1]$.

2. Par définition,

$$I_1 = \int_0^1 x^1 e^{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x.$$

Comme d'après **1**, F est une primitive de f sur $[0,1]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$I_1 = F(1) - F(0) = (-1-1)e^{1-1} - (-1-0)e^{1-0} = e - 2.$$

3. *Remarque : La relation admise est obtenue par intégration par parties. Si $I = [a,b]$ est un intervalle de $\mathbf{R}$, u et v deux fonctions à valeurs réelles définies et dérivables sur I,*

$$\int_a^b uv' = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'v.$$

Démonstration : La formule de dérivation d'un produit de fonctions permet d'écrire : $(uv)' = u'v + uv'$, donc en intégrant cette relation entre a et b, on obtient bien

$$\left[uv\right]_a^b = \int_a^b u'v + \int_a^b uv', \quad \textit{soit} \quad \int_a^b uv' = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'v.$$

D'après **1**, $I_1 = e - 2$ donc d'après la relation admise, $I_2 = (1+1)I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = 2e - 5$.

4. a) Étant donné que

$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 \leq 1 - x \leq 1,$$

par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbf{R}$,

$$\forall x \in [0,1], \qquad 1 \leq e^{1-x} \leq e.$$

De plus, pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leq x^n$ donc multiplier l'inégalité précédente par x^n ne change pas le sens des inégalités. On obtient donc que

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad 0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e.$$

b) Par linéarité de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_0^1 x^n e \mathrm{d}x = e\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = e\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = e(\frac{1^{n+1}}{n+1} - 0) = \frac{e}{n+1}.$$

c) Par croissance de l'intégrale, en intégrant l'inégalité obtenue en **4.a**, il vient que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \int_0^1 0 \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n e \mathrm{d}x.$$

D'après **4.b** et par définition de (I_n), l'inéquation précédente se réécrit : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq e/(n+1)$.

d) Comme la suite $(e/(n+1))$ a une limite nulle, la question **4.c** montre, avec le théorème des gendarmes, que la suite (I_n) a une aussi limite nulle.

Partie C

1. Notons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, (H_n) : "$u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n$".

- Initialisation : Comme $1!(u_1 - e + 2) + I_1 = u_1 + I_1 - (2 - e)$, d'après **Partie B, 2**, $I_1 = 2 - e$ donc $1!(u_1 - e + 2) + I_1 = u_1$. L'hypothèse (H_1) est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que (H_n) soit vraie. Par définition,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 = (n+1)(n!(u_1 - e + 2) + I_n) - 1 = (n+1)!(u_1 - e + 2) + (n+1)I_n - 1.$$

D'après la relation admise, $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$ donc $u_{n+1} = (n+1)!(u_1 - e + 2) + I_{n+1}$, ce qui montre que (H_{n+1}) est vraie.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n$.

2. a) *Remarque : Il y a plusieurs manières de montrer la limite admise, l'une d'elle consiste à montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n! \geq n$.*
Si $u = 0,7$, numériquement, $u_1 - e + 2 \approx -0,018 < 0$. D'après **Partie B, 4.c**, la limite de (I_n) est 0 et il est admis que $n! \to_{(n \to +\infty)} +\infty$, donc d'après **1**, $u_n \to_{(n \to +\infty)} -\infty$.

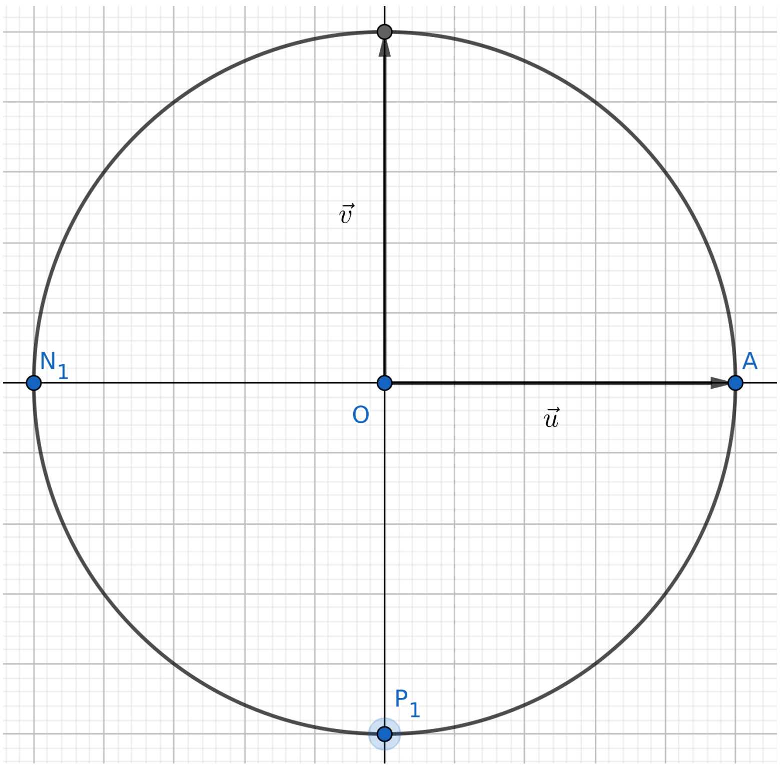
b) Si $u_1 = 0,8$, numériquement, $u_1 - e + 2 \approx 0,082 > 0$. Par les mêmes arguments qu'en **2.a**, $u_n \to_{(n \to +\infty)} +\infty$.

Exercice n° 3 Commun à tous les candidats

Partie A Étude d'exemples

1. a) On a $z^2 = \mathrm{i}^2 = -1$ et $1/z = 1/\mathrm{i} = 1/\mathrm{i} \times \mathrm{i}/\mathrm{i} = \mathrm{i}/-1 = -\mathrm{i}$.

b) Les points A, N et P ne sont pas alignés.

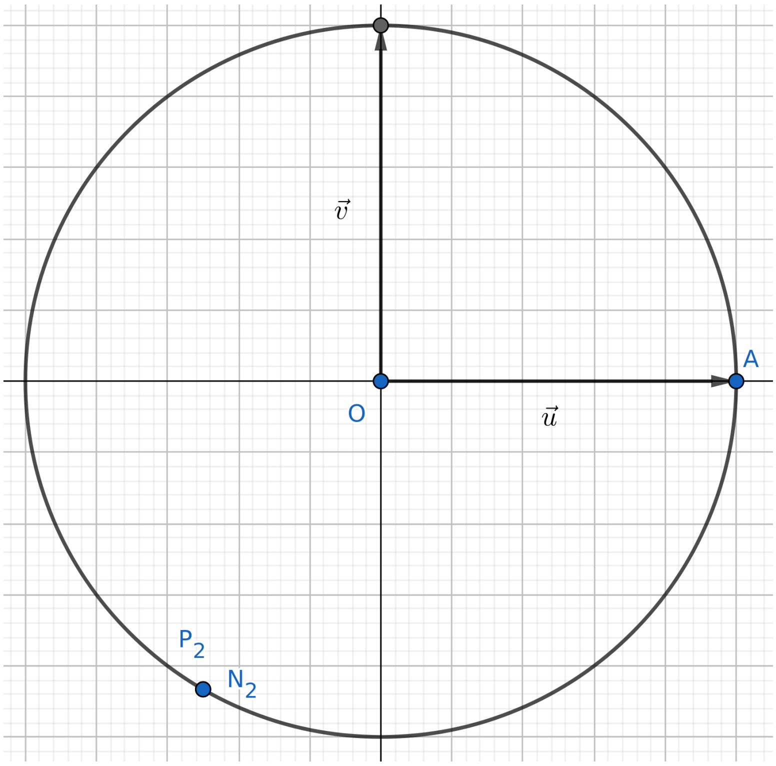


2. Notons Δ le discriminant de l'équation $z^2 + z + 1$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$, alors $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Cette équation admet donc deux racines complexes conjuguées,

$$\frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

3. a) On sait que $-1/2 = \cos(2\pi/3)$ et $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$, donc $z = e^{2\mathrm{i}\pi/3}$. On en déduit que $z^2 = e^{4\mathrm{i}\pi/3}$ et $1/z = e^{-2\mathrm{i}\pi/3} = e^{4\mathrm{i}\pi/3} = z^2$.

b) Les points A, N et P sont alignés, les points N et P étant confondus.



Partie B Étude du cas général

1. Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$,

$$(z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right) = z^2 - z + z - 1 + 1 - \frac{1}{z} = z^2 - \frac{1}{z}.$$

2. Notons $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{PN}$, d'affixe $z_{\overrightarrow{U}} = z_N - z_P = z^2 - 1/z$ ainsi que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{PA}$, d'affixe $z_{\overrightarrow{V}} = z_A - z_P = 1 - 1/z$. Les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont donc colinéaires si et seulement si il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $z_{\overrightarrow{V}} = kz_{\overrightarrow{U}}$, si et seulement si il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $z^2 - 1/z = k(1-1/z)$. D'après **1**, $z^2 - 1/z = (z^2+z+1)(1-1/z)$ donc

$$\begin{aligned}
\exists k \in \mathbf{R},\quad z^2 - \frac{1}{z} = k\left(1-\frac{1}{z}\right) &\iff \exists k \in \mathbf{R},\quad \left(1-\frac{1}{z}\right)(z^2+z+1) = k\left(1-\frac{1}{z}\right)\\
&\iff \exists k \in \mathbf{R},\quad \left(1-\frac{1}{z}\right)(z^2+z+1-k) = 0\\
&\iff \exists k \in \mathbf{R},\quad \left(1-\frac{1}{z} = 0 \quad \text{ou} \quad z^2+z+1 = k\right)\\
&\iff \exists k \in \mathbf{R},\quad (z = 1 \quad \text{ou} \quad z^2+z+1 = k).
\end{aligned}$$

Mais s'il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $z = 1$ ou $z^2+z+1 = k$, $z^2+z+1 \in \mathbf{R}$. Réciproquement, si $z^2+z+1 \in \mathbf{R}$, il existe bien $k \in \mathbf{R}$ tel que $z^2+z+1 = k$. On en déduit que

$$\exists k \in \mathbf{R},\quad (z = 1 \quad \text{ou} \quad z^2+z+1 = k) \iff z^2+z+1 \in \mathbf{R},$$

donc $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires si et seulement si $z^2+z+1 \in \mathbf{R}$.

3. On a bien

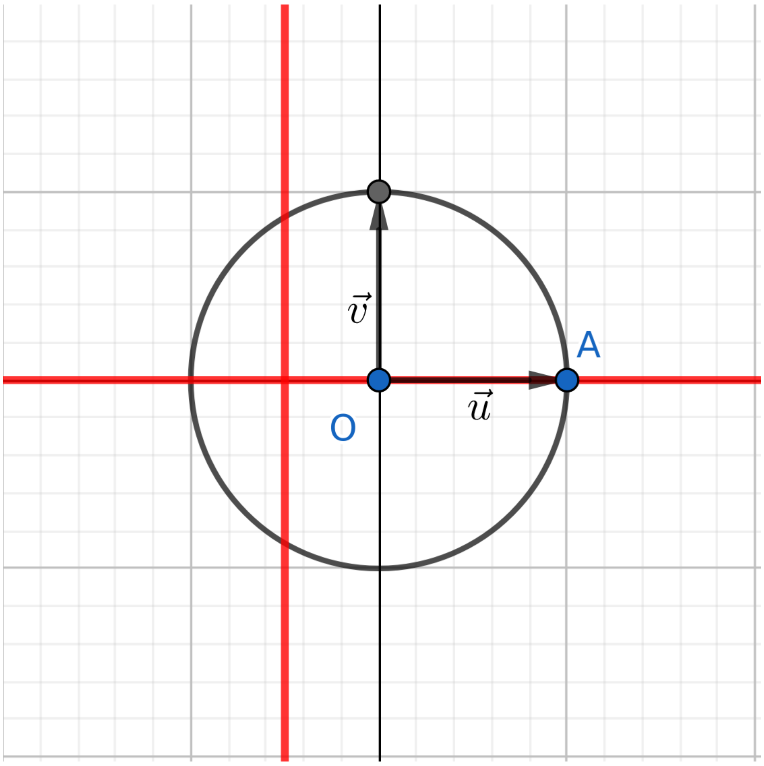
$$z^2+z+1 = (x+\mathrm{i}y)^2 + x + \mathrm{i}y + 1 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy + x + \mathrm{i}y + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + \mathrm{i}(2xy+y).$$

4. a) Soit $z \neq 0$, on note $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels. Les points A, N et P d'affixes respectives 1, z^2 et $1/z$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{PA}$ sont colinéaires, donc d'après **2**, si et seulement si $z^2+z+1 \in \mathbf{R}$. D'après **3**, la partie imaginaire de z^2+z+1 est égale à $2xy + y = (2x+1)y$, d'où

$$z^2+z+1 \in \mathbf{R} \iff (2x+1)y = 0 \iff \left(x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad y = 0\right).$$

Mais on recherche les points d'affixes non nulles, donc le point $O(0;0)$ n'est pas solution. On en déduit que l'ensemble des points recherché est l'ensemble des points d'abscisse égale à $-1/2$ ou d'ordonnée égale à 0, privé du point $O(0;0)$.

b) L'ensemble des solutions trouvé en **4.a** est représenté par des traits rouges. Le point $O(0;0)$ est exclu de cet ensemble.



Exercice n° 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Par exemple, 3 et 37 sont deux nombres premiers de somme égale à 40.

2. Notons l'équation $(E) : 20x + 19y = 40$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$.

- Analyse : Soit $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ solution de (E). Cherchons une solution particulière de cette équation. Étant donné que $20 - 19 = 1$, en multipliant cette égalité par 40, on obtient que $20 \times 40 + 19 \times (-40) = 40$, donc $(40; -40)$ est un couple solution de (E). On a donc

$$\begin{cases} 20x + 19y = 40 \\ 20 \times 40 + 19 \times (-40) = 40. \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième ligne à la première, il vient que $20(x - 40) + 19(y + 40) = 0$, d'où

$$20(40 - x) = 19(y + 40). \tag{1}$$

D'après le théorème de Bézout, la relation $20 - 19 = 1$ montre que 19 et 20 sont des entiers premiers entre eux. Le théorème de Gauss montre alors que 20 divise $y + 40$, donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $20k = y + 40$, soit $y = 20k - 40$. En injectant cette relation dans la relation (1) au dessus, il vient

$$20(40 - x) = 19(20k - 40 + 40), \quad \text{d'où} \quad 40 - x = 19k, \quad \text{soit} \quad x = 40 - 19k.$$

Les solutions de (E) sont donc de la forme $(40 - 19k; 20k - 40)$, avec $k \in \mathbf{Z}$.

- Synthèse : Soit $k \in \mathbf{Z}$,

$$20(40 - 19k) + 19(20k - 40) = 20 \times 40 - 19 \times 40 - 20 \times 19k + 19 \times 20k = 40,$$

donc les couples de la forme $(40 - 19k; 20k - 40)$, avec $k \in \mathbf{Z}$, sont bien solutions de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est donc exactement l'ensemble $\{(40 - 19k; 20k - 40) \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

3. a) L'entier 40 étant pair, on commence par chercher la plus grande puissance de 2 qui le divise :

$$40 = 2 \times 20 = 2^2 \times 10 = 2^3 \times 5.$$

Les entiers 2 et 5 étant premiers, on a bien trouvé la décomposition en produit de nombres premiers de 40.

b) Soient x et y deux entiers naturels. Le tableau de congruences ci-dessous donne les parités de $x+y$ et $x-y$ en fonction de celles de x et y.

$x \pmod 2$	$y \pmod 2$	$x+y \pmod 2$	$x-y \pmod 2$
0	0	$0+0=0$	$0-0=0$
1	0	$1+0=1$	$1-0=1$
0	1	$0+1=1$	$0-1=1$
1	1	$1+1=0$	$1-1=0$

Dans tous les cas, on observe bien que $x+y$ et $x-y$ sont congrus modulo 2, donc sont de même parité.

c) *Remarque : On pourrait résoudre l'équation diophantienne $X-Y=40$, avec $X=x^2$ et $Y=y^2$ comme en **2**, mais l'énoncé semble plutôt diriger le candidat vers l'utilisation de la décomposition en produit de nombres premiers.*

Notons l'équation $(\mathcal{E}) : x^2-y^2=40$, d'inconnue $(x,y) \in \mathbf{N}^2$.

- Analyse : Soit $(x;y) \in \mathbf{N}^2$ un couple solution de $(\mathcal{E})$, alors $x^2-y^2=40$, donc $(x+y)(x-y)=40$. D'après **3.a**, la décomposition en produit de nombres premiers de 40, donc de $(x+y)(x-y)$, est $2^3 \times 5$. Par unicité de la décomposition en produit de nombres premiers, il existe p, q, r et s des entiers naturels tels que

$$\begin{cases} x+y=2^p \times 5^r \\ x-y=2^q \times 5^s \\ p+q=3 \\ r+s=1. \end{cases}$$

De plus, d'après **3.b**, $x+y$ et $x-y$ sont de même parité. S'ils étaient impairs, leur produit le serait aussi, or il est égal à 40, un nombre pair. Ces deux entiers sont donc pairs, donc sont divisibles par 2, d'où $p \geq 1$ et $q \geq 1$. On en déduit que

$$(x+y;x-y) \in \{(2^1;2^2\times 5);(2^2;2^1\times 5);(2\times 5;2^2);(2^2\times 5;2)\} = \{(2;20);(4;10);(10;4);(20;2)\}.$$

Mais x et y étant des entiers naturels, ils sont positifs, d'où $x+y \geq x-y$. Cette condition permet d'éliminer deux couples dans l'ensemble précédent et permet de dire que $(x+y,x-y) \in \{(10;4);(20;2)\}$. Enfin,

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x=14 \\ y=x-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases},$$

et

$$\begin{cases} x+y=20 \\ x-y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x=22 \\ y=x-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=11 \\ y=9. \end{cases}$$

Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont donc dans l'ensemble $\{(7;3);(11;9)\}$.

- Synthèse : Comme $7^2-3^2=49-9=40$ et $11^2-9^2=121-81=40$, $(7;3)$ et $(11;9)$ sont bien solutions de $(\mathcal{E})$.

Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont exactement les couples $(7;3)$ et $(11;9)$.

Partie B Sommes de cubes

1. a) Comme $40-13=27=3^3$, une décomposition de 40 en somme de 5 cubes est $40=1^3+3^3+7^3+10^3-11^3$.

b) *Remarque : La relation admise est obtenue par un simple développement des cubes. Soit $n \in \mathbf{N}$,*

$$(n+1)^3+(n-1)^3-n^3-n^3=(n^3+3n^2+3n+1)+(n^3-3n^2+3n-1)-2n^3=6n.$$

Étant donné que $48=6\times 8$, la relation admise permet d'écrire :

$$48=6\times 8=(8+1)^3+(8-1)^3-8^3-8^3=9^3+7^3-8^3-8^3.$$

De plus, $40=48-8$ et $8=2^3$, d'où $40=9^3+7^2-8^3-8^3-2^3$.

2. a) Les cases correspondant aux entiers allant de 0 à 3 se complètent par un calcul direct. Pour les autres, on peut utiliser le fait que 5, 6, 7 et 8 sont congrus respectivement à -4, -3, -2 et -1 modulo 9.

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

b) *Remarque : Être congru à 8 modulo 9, c'est aussi être congru à* -1 *modulo 9 donc le tableau précédent est bien juste.*

Le cube de tout entier naturel est congru à 0, 1 ou -1 modulo 9, donc toute somme de trois cubes d'entiers naturels est congrue à un entier compris entre -3 et 3 modulo 9. Cependant, $40 = 4 \times 9 + 4$ donc 40 est congru à 4 modulo 9. Comme 4 n'est pas congru à un entier compris entre -3 et 3 modulo 9, 40 ne peut pas être décomposé en somme de 3 cubes.