Baccalauréat S

Session 2019 Métropole - Mathématiques

Proposition de corrigé par Thomas Harbreteau et complété par www.sujetdebac.fr. Pour toute question ou remarque éventuelle, vous pouvez me contacter à l'adresse mail suivante : `tharbreteau@protonmail.com`.

Exercice n° 1 *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. (**a**) Comme $-x \to_{(x\to+\infty)} -\infty$, par continuité de l'exponentielle, $e^{-x} \to_{(x\to+\infty)} 0$. De plus, $e^{x} \to_{(x\to+\infty)} +\infty$, donc par opérations sur les limites, $f(x) \to_{(x\to+\infty)} -\infty$.

(**b**) Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont définies et dérivables sur $\mathbf{R}_+$ donc par opérations, f l'est également, avec

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x + (-e^{-x})) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x).$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbf{R}_+$, si $x \in \mathbf{R}_+$,

$$e^{-x} - e^x < 0 \iff e^{-x} < e^x \iff 1 < e^x e^x = e^{2x}.$$

La fonction logarithme étant strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, elle conserve les inégalités strictes, d'où

$$1 < e^{2x} \iff \ln 1 < \ln e^{2x} \iff 0 < 2x \iff x > 0, \quad \text{et} \quad f'(x) = 0 \iff x = 0.$$

La fonction f' est donc strictement négative sur $\mathbf{R}_+^*$ et nulle en un unique point, qui est 0, donc f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

(**c**) D'après **1.a**, $f(x) \to_{(x\to+\infty)} -\infty$ donc il existe $A > 0$ tel que $f(A) < 0$. De plus, $f(0) = 7/2-(e^0+e^{-0})/2 = 7/2 > 0$ et f est continue sur $[0, A]$. Par théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur $]0, A[$, donc sur $\mathbf{R}_+$, notons $\alpha > 0$ un tel point d'annulation. La stricte décroissance de f sur $\mathbf{R}_+$ démontrée en **1.b** montre l'unicité de α.

2. Remarquons que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = f(x),$$

donc f est paire. On a donc, si $x \in \mathbf{R}_-^*$, $f(x) = 0$ si et seulement si $f(-x) = 0$, mais $-x \in \mathbf{R}_+$. D'après **1.c**, f s'annule en α uniquement sur $\mathbf{R}_+$, donc $f(x) = 0$ si et seulement si $-x = \alpha$, si et seulement si $x = -\alpha$. Ainsi, $-\alpha < 0$ est l'unique point d'annulation de f sur $\mathbf{R}_-^*$. La fonction f s'annule donc une unique fois sur $\mathbf{R}_+$ et une unique fois sur $\mathbf{R}_-^*$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qui sont α et $-\alpha$, donc qui sont opposées.

Partie B

1. *Remarque : On a montré en* ***Partie A, 2*** *que f était paire, ce qui se traduit bien par une symétrie de son graphe par rapport à l'axe des ordonnées.*

Remarque bis : La hauteur n'est pas proprement définie par l'énoncé. On peut soit l'interpréter comme la différence entre le maximum et le minimum de f sur $[-\alpha, \alpha]$, soit comme ce que semble indiquer le dessin, à savoir la valeur de $f(0)$. Les deux seraient sans doutes acceptés, à condition d'expliquer sur sa copie quelle définition on utilise.

Définissons la hauteur h d'un arceau comme la différence entre le maximum et le minimum de f sur $[-\alpha, \alpha]$. On a montré en **Partie A, b** que f était strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Comme elle est paire, elle est strictement croissante sur $\mathbf{R}_-$, donc elle atteint son maximum en 0, et son minimum est 0, atteint en α et $-\alpha$. On a donc $h = f(0) - 0 = 7/2 - (e^0 + e^{-0})/2 = 7/2 - 2/2 = 5/2 = 2,5$m.

2. (**a**) De même qu'en **Partie A, 1.b**, on montre que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}),$$

d'où

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad 1+(f'(x))^2 = 1+\frac{1}{2^2}(e^{-x}-e^{x})^2 = \frac{4}{4}+\frac{1}{4}((e^{-x})^2-2e^{-x}e^{x}+(e^{x})^2) = \frac{1}{4}((e^{-x})^2+2+(e^{x})^2) = \frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^2.$$

(**b**) D'après **2.a**,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^2} = \frac{1}{2}|e^{x}+e^{-x}| = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}),$$

car la fonction exponentielle est positive sur $\mathbf{R}$. Par conséquent,

$$I = \int_0^{\alpha} \sqrt{1+(f'(x))^2)}\mathrm{d}x = \int_0^{\alpha} \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[e^{x}+(-e^{-x})\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2}((e^{\alpha}-e^{0})-(e^{-\alpha}-e^{0})) = \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}).$$

Mais on a montré en **Partie A, 2** que f est paire, donc la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ sur $[-\alpha, 0]$ est égale à celle sur $[0, \alpha]$, qui vaut I. On en déduit que la longueur d'un arceau est égale à $2I$, c'est-à-dire à $e^{\alpha} - e^{-\alpha}$.

Partie C

1. La quantité $\mathcal{A}_N$ de bâche nécessaire pour recouvrir la façade nord est égale à l'aire délimitée par un arceau et le sol, donc à l'aire sous la courbe représentative de f entre $-\alpha$ et α. Par conséquent,

$$\mathcal{A}_N = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x.$$

Mais d'après **Partie A, 2**, f est paire donc

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x.$$

De plus, la quantité $\mathcal{A}_S$ de bâche nécessaire pour recouvrir la façade sud est la même que celle pour la façade nord, moins l'aire de l'ouverture, égale à $1 \times 2 = 2\mathrm{m}^2$. Ainsi, $\mathcal{A}_S = \mathcal{A}_N - 2$, et

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_N + \mathcal{A}_S = 2\mathcal{A}_N - 2 = 2 \times 2\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x - 2 = 4\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x - 2.$$

2. *Remarque : Une valeur approchée de α peut-être trouvée par dichotomie.*
D'après **1**,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = 4\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x - 2 &= 4\int_0^{\alpha} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\right)\mathrm{d}x - 2 \\
&= 4\left[\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\right]_0^{\alpha} - 2 \\
&= 4\left[\frac{7}{2}\alpha - \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{0}-(e^{-\alpha}-e^{0}))\right] - 2 \\
&= 4\left[\frac{7}{2}\alpha - \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})\right] - 2 \\
&= 14\alpha - 2(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) - 2.
\end{aligned}$$

De plus, la distance délimitée entre le premier et le dernier arceau est $3 \times 1,5 = 4,5\mathrm{m}$ et la longueur d'un arceau est, d'après **2.b**, $I = e^{\alpha} - e^{-\alpha}$. La bâche recouvrant le dessus de la serre est donc un rectangle de côtés I et $4,5$, donc d'aire $\mathcal{A}_D = 4,5I = 4,5(e^{\alpha} - e^{-\alpha})$. La quantité totale de bâche $\mathcal{A}_T$ nécessaire pour réaliser cette serre est donc

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A} + \mathcal{A}_D = 14\alpha - 2(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) - 2 + 4,5(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) = 14\alpha + 2,5(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) - 2 \simeq 42\mathrm{m}^2.$$

Remarque : Le résultat était prévisible, 42 étant la réponse à la grande question sur la vie, l'univers et le reste. Les lecteurs d'H2G2 comprendront.

Exercice n° 2 *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. (**a**) La variable aléatoire X_A suit une loi uniforme sur $[9, 25]$, donc $\mathbf{E}(X_A) = (25 + 9)/2 = 34/2 = 17$. La durée moyenne d'une partie de type A est 17min.

(**b**) La variable aléatoire X_B suit une loi normale, donc son espérance est égale à l'abscisse du point au sommet de la courbe en cloche qui est la représentation de sa fonction de densité, représentée sur le graphique. On peut y lire $\mathbf{E}(X_B) \simeq 17$, donc la durée moyenne d'une partie de type B est 17min.

2. Notons X la variable aléatoire modélisant le choix d'un type de jeu. X prend la valeur A avec une probabilité $0,5$ et la valeur B avec la même probabilité. Notons T la variable aléatoire modélisant la durée d'une partie. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(T < 20) = \mathbf{P}(T < 20, X = A) + \mathbf{P}(T < 20, X = B) = \mathbf{P}(X_A < 20, X = A) + \mathbf{P}(X_B < 20, X = B).$$

Les variables aléatoires X, X_A et X_B étant indépendantes,

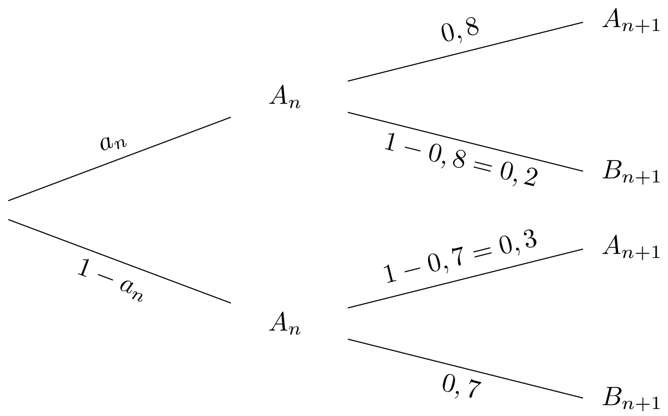
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_A < 20, X = A) + \mathbf{P}(X_B < 20, X = B) &= \mathbf{P}(X_A < 20)\mathbf{P}(X = A) + \mathbf{P}(X_B < 20)\mathbf{P}(X = B)\\ &= 0,5[\mathbf{P}(X_A < 20) + \mathbf{P}(X_B < 20)].\end{aligned}$$

La variable aléatoire X_A suivant une loi uniforme sur $[9, 25]$, $\mathbf{P}(X_A < 20) = (20 - 9)/(25 - 9) = 0,6875$. La variable aléatoire X_B suivant une loi normale de moyenne $\mu = 17$ d'après **1.b**, et d'écart type 3 donc $\mathbf{P}(X_B < 20)$ s'obtient à l'aide de la calculatrice et a pour résultat 0,8413. On en déduit que

$$\mathbf{P}(T < 20) = 0,5(0,6875 + 0,8413) \simeq 0,76.$$

Partie B

1. (**a**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, les données de l'énoncé permettent de construire l'arbre de probabilités suivant :



(**b**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1} \cap B_n) = \mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n)\mathbf{P}(B_n),$$

donc l'arbre construit en **1.a** montre que $\mathbf{P}(A_{n+1}) = 0,8\mathbf{P}(A_n) + 0,3\mathbf{P}(B_n)$, soit

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3(1 - a_n) = 0,5a_n + 0,3.$$

2. (**a**) Notons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(H_n) : 0 \leq a_n \leq 0,6$.

- Initialisation : Comme $a_1 = a = 0,5$, (H_1) est vraie.
- Hérédité : $n \in \mathbf{N}^*$ tel que (H_n) soit vraie. D'après **1.b**, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ mais d'après (H_n), $0 \leq a_n \leq 0,6$ donc $0,3 \leq 0,5a_n + 0,3 \leq 0,5 \times 0,6 + 0,3$, soit $0 \leq a_{+1} \leq 0,6$, d'où (H_{n+1}) est vraie.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq a_n \leq 0,6$.

(**b**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, d'après **1.b**, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ donc $a_{n+1} - a_n = -0,5a_n + 0,3$. Mais d'après **2.a**, $0 \leq a_n \leq 0,6$ donc $0 \geq -0,5a_n \geq -0,5 \times 0,6 = -0,3$, d'où $a_{n+1} - a_n \geq -0,3 + 0,3 = 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} \geq a_n$, donc que la suite (a_n) est croissante.

(**c**) D'après **2.b**, (a_n) est croissante et d'après **2.a**, elle est majorée, donc elle converge. Notons l sa limite, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$, l vérifie

$$l = 0,5l + 0,3, \quad \text{donc} \quad 0,5l = 0,3, \quad \text{soit} \quad l = 0,6.$$

3. (**a**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, d'après **1.b**, $a_{n+1} = 0,5a_n+0,3$, donc $a_{n+1}-0,6 = 0,5a_n+0,3-0,6 = 0,5a_n-0,3 = 0,5(a_n-0,6)$, donc $u_{n+1} = 0,5u_n$. La suite (u_n) est donc bien géométrique, de raison $0,5$.

(**b**) D'après **3.a**, (u_n) est une suite géométrique de raison $0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = u_1 \times 0,5^{n-1} = (a-0,6) \times 0,5^{n-1},$$

donc par définition de (u_n),

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = (a-0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6.$$

(**c**) Comme $-1 < 0,5 < 1$, la suite géométrique de raison $0,25$ a une limite nulle, donc pas opérations sur les limites, $a_n \to_{(n\to+\infty)} 0,6$. Cette limite est indépendante de la valeur de a.

(**d**) Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n + b_n = 1$, $b_n = 1 - a_n$, mais d'après **3.c**, $a_n \to_{(n\to+\infty)} 0,6$ donc par opérations sur les limites, $b_n \to_{(n\to+\infty)} 0,4$. On bout d'un certain nombre de parties, la probabilité de faire une partie A est plus grande que celle de faire une partie B, donc la publicité qui sera la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéos sera celle insérée en début des parties de type A.

Exercice n° 3 *Commun à tous les candidats*

1. Notons Δ le discriminant de (E),

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 \times 3 - 16 = 12 - 16 = -4 < 0.$$

L'équation (E) admet donc deux racines complexes conjuguées distinctes, que l'on note z_A et z_B, avec

$$z_A = \frac{2\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}}{2} = \sqrt{3} - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_B = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

Comme z_A et z_B sont conjugués, $|z_A| = |z_B| = |\sqrt{3} + \mathrm{i}| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ et $OA = OB$. De plus,

$$AB = |z_B - z_A| = |\sqrt{3} + \mathrm{i} - (\sqrt{3} - \mathrm{i})| = |2\mathrm{i}| = 2,$$

donc $OA = OB = AB$, donc le triangle OAB est équilatéral, <u>l'affirmation 1 est vraie.</u>

2. Mettons u sous forme exponentielle, $|u| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, et

$$u = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2e^{\mathrm{i}\pi/6}.$$

Ainsi, $u^{2019} = 2^{2019}e^{2019\mathrm{i}\pi/6}$, or $\underline{2019 = 6 \times 336 + 3}$, d'où $u^{2019} = 2^{2019}e^{\mathrm{i}336\pi + \mathrm{i}\pi/2} = 2^{2019}\mathrm{i}$.
De plus, $u^{2019} + \overline{u}^{2019} = 2^{2019}\mathrm{i} + \overline{2^{2019}\mathrm{i}} = 0$. <u>L'affirmation 2 est donc fausse.</u>

3. Soit $n \geq 1$, notons $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^{-nx+1}$, définies et dérivables sur $\mathbf{R}_+$. Comme $f_n = u \times v$, par opérations f_n l'est aussi et par formule de dérivation d'un produit de fonctions,

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad f_n'(x) = e^{-nx+1} + x(-n)e^{-nx+1} = (1 - xn)e^{-nx+1}.$$

Si $x \in \mathbf{R}_+$, la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbf{R}_+$,

$$f_n'(x) > 0 \iff 1 - xn > 0 \iff xn < 1 \iff x < \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Pour tout entier n non nul, f_n admet bien un maximum, et ce en $1/n$. L'affirmation 3 est bien vraie.

4. Par positivité de la fonction exponentielle sur $\mathbf{R}$,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |f(x)| = |\cos x| e^{-x} \leq e^{-x},$$

car la fonction cosinus est majorée par 1 sur $\mathbf{R}$, donc $|f(x)| \to_{(x\to+\infty)} 0$, d'où $f(x) \to_{(x\to+\infty)} 0$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $x = 0$, ce qui prouve que l'affirmation 4 est vraie.

5. Si la variable I contient la valeur 15 en fin d'algorithme, on a alors $2^{14} \leq A$ et $2^{15} > A$.
Par conséquent : $2^{14} \leq A < 2^{15}$. Par stricte croissance de la fonction logarithme sur $\mathbf{R}_+^*$, on obtient $\ln(2^{14}) \leq \ln(A) < \ln(2^{15})$ et donc $14\ln(2) \leq \ln(A) < 15\ln(2)$.
L'affirmation 5 est donc fausse.

Exercice n° 4 *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Partie A Quelques exemples de matrices appartenant à l'ensemble $\mathcal{S}$

1. Comme $6 \times (-4) - 5 \times (-5) = 1$ et que les coefficients de A sint bien des entiers, A appartient à $\mathcal{S}$.

2. Analyse : Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$$

soit un élément de $\mathcal{S}$. Tout d'abord, a et b sont des entiers. De plus, $ad - 2 \times 3 = 1$, donc $ad = 7$. Le produit ad est positif, donc a et d sont de même signe. De plus, a et d sont des diviseurs entiers de 7, un nombre premier, dont les seuls diviseurs entiers sont 1, -1, 7 et -7. On en déduit que

$$(a, d) \in \{(1,7), (7,1), (-1,-7), (-7,-1)\}.$$

Synthèse : Soit $(a, b) \in \{(1,7), (7,1), (-1,-7), (-7,-1)\}$, alors $ad = 7$ donc $ad - 6 = 1$. Les nombres a et d étant des entiers, on a

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}.$$

Il existe donc exactement quatre matrices de la forme donnée par l'énoncé appartenant à S, à savoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. (**a**) Analyse : Soit $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ solution de (E). Le couple $(1, 2)$ est solution de cette équation, donc

$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 5 \times 2 - 2 \times 2 = 1 \end{cases}.$$

En soustrayant la deuxième ligne à la première, il vient que $5(x-1) - 2(y-2) = 0$, soit $5(x-1) = 2(y-2)$. L'entier 5 divise donc $2(y-2)$, mais la relation $5 - 2 \times 2 = 1$ montre, d'après le théorème de Bézout, que 2 et 5 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, 5 divise alors $y - 2$, donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $5k = y - 2$, donc $y = 5k + 2$. En injectant cette relation dans la précédente, on trouve que $5(x-1) = 2(5k+2-2) = 10k$, d'où $x = 2k+1$. L'ensemble des solutions de (E) est donc inclus dans l'ensemble $\{(2k+1, 5k+2) \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Synthèse : Soit $k \in \mathbf{Z}$, $5(2k+1) - 2(5k+2) = 10k + 5 - 10k - 4 = 1$, d'où $(2k+1, 5k+2)$ est solution de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est donc exactement $\{(2k+1, 5k+2) \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

(**b**) Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, notons la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$
La matrice A appartient donc à $\mathcal{S}$ si et seulement si a et b sont des entiers et $5a - 2b = 1$, si et seulement si a et b sont des entiers solutions de (E). D'après **3.a**, ceci équivaut à dire que $(a, b) \in \{(2k + 1, 5k + 2) \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Mais cet ensemble est infini, en effet si k et k' sont des entiers,
$$(2k + 1, 5k + 2) = (2k' + 1, 5k' + 2) \iff \begin{cases} 2k + 1 = 2k' + 1 \\ 5k + 2 = 5k' + 2 \end{cases} \iff k = k'.$$
Cet ensemble contient donc au moins autant d'éléments distincts qu'il existe d'entiers, il est donc infini. L'ensemble des matrices de la forme donnée par l'énoncé qui sont solutions de $\mathcal{S}$ est donc infini, et il s'agit de
$$\left\{ \begin{pmatrix} 2k + 1 & 5k + 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Partie B Quelques propriétés des matrices appartenant à l'ensemble $\mathcal{S}$

1. Comme $ad - bc = 1$, le théorème de Bézout montre que a et d sont permiers entre eux.

2. (**a**) *Remarque : Un produit matriciel montre directement que $AB = BA$.*
Par produit matriciel,
$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & bd - bd \\ ac - ca & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$
(**b**) Comme d'après la relation admise et **2.a**, $AB = BA = I$, A est inversible, d'inverse B.

(**c**) D'après **2.c**, l'inverse de A est B. Ses coefficients sont entiers et si l'on note $\alpha = d$, $\beta = -b$, $\gamma = -c$ et $\delta = a$,
$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$
On a bien $\alpha\delta - \beta\gamma = da - (-b)(-c) = ad - bc = 1$, donc $B \in \mathcal{S}$.

3. (**a**) Par produit matriciel,
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}.$$
En soustrayant b fois la deuxième ligne à d fois la première, on obtient $dx' - by' = d(ax + by) - b(cx + dy) = (ad - bc)x = x$.
Remarque : La relation admise est obtenue en soustrayant c fois la première ligne à a fois la deuxième.

(**b**) Comme $D' = \text{pgcd}(x, y)$, il divise x' et y'. D'après **3.a**, $x = dx' - by'$ donc D' divise x, et la relation admise $y = ay' + cx'$ montre que D' divise y. C'est donc un diviseur commun de x et y, donc il divise D. Le calcul de **3.a** montré également que $x' = ax + by$ et que $y' = cx + dy$, donc par les mêmes arguments D divise D'. Par conséquent, $D = \pm D'$ mais ces nombres étant positifs, on a bien $D = D'$.

4. Notons
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$
alors comme $2 \times 2 - 3 \times 1 = 1$ et que les coefficients de A sont entiers, $A \in \mathcal{S}$. De plus, par produit matriciel,
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_n + 3y_n \\ x_n + 2y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}.$$
D'après **3.a**, comme $A \in \mathcal{S}$,
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \text{pgcd}(x_{n+1}, y_{n+1}) = \text{pgcd}(x_n, y_n). \tag{1}$$
Notons pour tout $n \in \mathbf{N}$, (H_n) : $\text{pgcd}(x_n, y_n) = \text{pgcd}(x_0, y_0)$.

- Initialisation : D'après (1), $\text{pgcd}(x_1, y_1) = \text{pgcd}(x_0, y_0)$ donc (H_0) est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que (H_n) soit vraie. D'après (1), $\text{pgcd}(x_{n+1}, y_{n+1}) = \text{pgcd}(x_n, y_n)$, donc d'après (H_n), $\text{pgcd}(x_{n+1}, y_{n+1}) = \text{pgcd}(x_0, y_0)$, d'où (H_{n+1}) est vraie.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \text{pgcd}(x_n, y_n) = \text{pgcd}(x_0, y_0)$. Pour trouver $\text{pgcd}(x_0, y_0)$, on applique l'algorithme d'Euclide. Mais à la première itération, on obtient que $2019 = 673 \times 3$, donc $\text{pgcd}(x_0, y_0) = 673$. Par conséquent,
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \text{pgcd}(x_n, y_n) = 673.$$