**Baccalauréat technologique – Série STMG**

*Session 2019 (Centres Étrangers Afrique / Pondichéry)*

# Épreuve de Mathématiques

## Proposition de corrigé

*Ce corrigé est composé de 5 pages.*

**Notations**

Dans tout ce corrigé, pour des soucis pratiques, on utilisera les notations suivantes :

$\forall$ : « pour tout » ;

$\Longrightarrow$ : « implique » ;

$\Longleftrightarrow$ : « équivaut à ».

De plus, on notera $\mathbb{P}(A)$ la probabilité de l'événement $A$ et $\mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de l'événement $B$ sachant $A$.

*

* *

## Exercice 1

*Remarque : cet exercice est un QCM, pour lequel il n'est pas demandé de justifier les réponses. Aussi, les justifications données le sont à titre purement informatif, et ne devaient pas figurer sur la copie.*

**1.** Réponse b.

***Justification :***

*On modélise la population à l'année $(2018+n)$ par la suite $(p_n)$ de premier terme $p_0 = 2375$ et raison $q = 0,95$. Il vient alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = 2375 \times 0,95^n$$

*D'où, en 2022, on aura $n = 4$ et $p_4 = 2375 \times 0,95^4 = 1934 \approx 1930$ individus.*

**2.** Réponse c.

***Justification :***

*On cherche la population en 2017, que l'on note $p_{-1}$. Or, on sait que la suite $(p_n)$ est géométrique de raison $q = 0,95$. Ce qui signifie que $p_0 = 0,95 \times p_{-1}$. Alors finalement, $p_{-1} = \frac{p_0}{0,95} = \frac{2375}{0,95} = 2500$.*

**3.** Réponse b.

***Justification :***

*On cherche ici le plus petit $n$ tel que $v_n < 0,75p_0$. On va donc boucler tant que $v_n \geq 0,75p_0$, ce qui permet déjà d'éliminer l'algorithme c.*

*De plus, le test effectué par le `Tant que` devra porter sur la valeur de $v_0$ et non pas sur celle de la variable $v$, qui sera modifiée. On supprime alors l'algo a.*

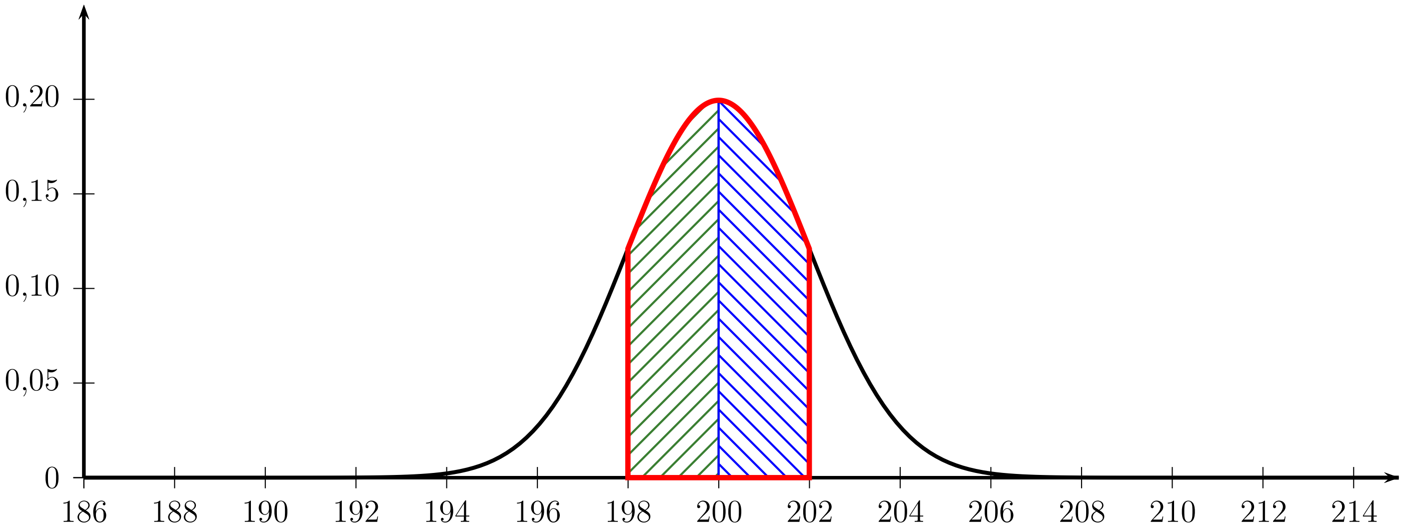
*Enfin, le seul algorithme qui effectue la bonne réaffectation de la variable $v$ parmi ceux qui nous restent est l'algo b. Il est donc le bon.*

## Exercice 2

### Partie A

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(200; \sigma^2)$$

On cherche la probabilité que la tablette soit commercialisable, c'est-à-dire $P(198 \leq X \leq 202)$. Or, on sait que $P(198 \leq X \leq 200) = 0,34$, et par symétrie autour de l'espérance, on peut remarquer que $P(198 \leq X \leq 200) = P(200 \leq X \leq 202)$.



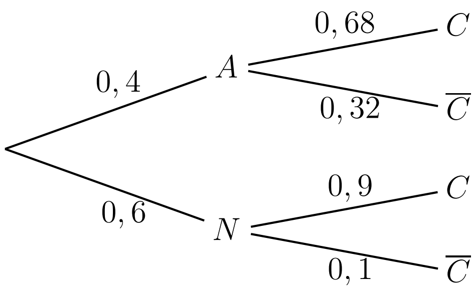

On a alors :

$P(198 \leq X \leq 202) = P(198 \leq X \leq 200) + P(200 \leq X \leq 202) = 2 \times P(198 \leq X \leq 200) = 2 \times 0,34 = 0,68$

La tablette sera donc commercialisable avec une probabilité $\underline{P(198 \leq X \leq 202) = 0,68}$.

### Partie B

**1.** On complète, à l'aide des données, l'arbre pondéré :




**2.** On a alors $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(C) = 0,4 \times 0,68 = 0,272$.
Une tablette sera produite par l'ancienne chaîne et commercialisable avec une probabilité $\underline{\mathbb{P}(A \cap C) = 0,272}$.

**3.** On cherche à exprimer la probabilité qu'une tablette soit commercialisable, c'est-à-dire que l'on cherche la valeur de $\mathbb{P}(C)$. On applique alors la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(C) = 0,4 \times 0,68 + 0,6 \times 0,9 = 0,812$$

La probabilité qu'une tablette soit commercialisable est donc de $\underline{\mathbb{P}(C) = 0,812 = 81,2\,\%}$. On a donc bien au moins 80 % de la production qui est commercialisable.

## Exercice 3

### Partie A

**1.** Le taux d'évolution, entre l'année $x_i$ et l'année $x_{i+1}$ est défini par :

$$\tau_{i \to i+1} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{y(x_i)}$$

La formule à rentrer est donc $\boxed{= (\texttt{C3} - \texttt{B3})/\texttt{B3}}$.

**2.** On calcule le taux d'évolution global entre 2012 et 2015 :

$$\tau = \frac{y(x=5) - y(x=2)}{y(x=2)} = \frac{2,1-1,6}{1,6} = 0,31$$

Le taux d'évolution global entre 2012 et 2015 vaut donc $\underline{\tau = 21\,\%}$.

**3.** On en déduit le taux d'évolution annuel moyen :

$$\tau_A = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{31}{2015-2012} \underline{= 10,3\,\%}$$

**Partie B**

**1.** On calcule, à la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de $y$ en $x$, et on trouve : $\underline{y = 0,128x + 1,398}$.

**2.** On prend alors comme droite d'ajustement $(d)$ : $y = 0,13x + 1,40$. On peut ainsi en déduire qu'en 2019, on aura $y(x = 9) = 0,13 \times 9 + 1,40 \underline{= 2,57\text{ millions de visiteurs}}$.

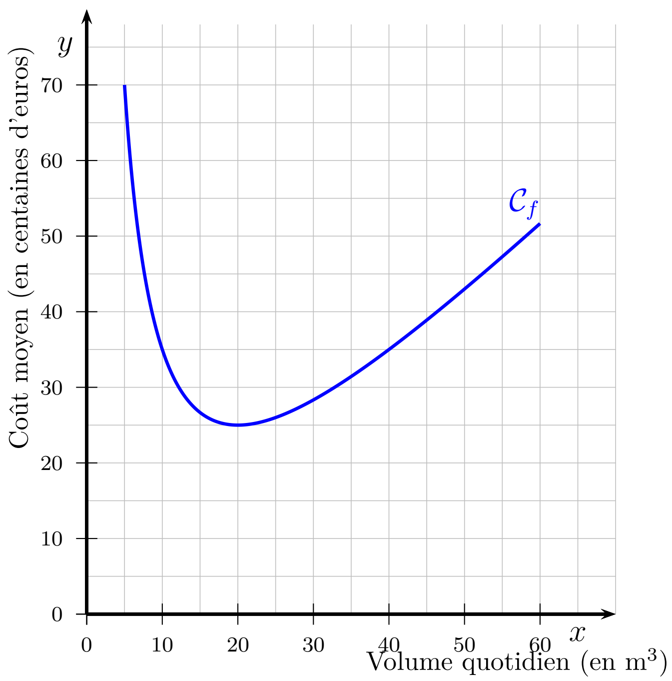
**3.** On cherche l'année à partie de laquelle la fréquentation annuelle dépassera $2,75$ millions de visiteurs. Cela revient à chercher le plus petit entier $x$ tel que $y(x) \geq 2,75$. On va donc résoudre cette inéquation.
Soit $x \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} y(x) \geq 2,75 &\iff 0,13x + 1,40 \geq 2,75 \\ &\iff 0,13x \geq 2,75 - 1,40 = 1,35 \\ &\iff x \geq \frac{1,35}{0,13} = 10,38 \end{aligned}$$

Or, $x$ est entier. Alors $y(x) \geq 2,75 \iff \underline{x \geq 11}$. Aussi, la fréquentation annuelle dépassera les $2,75$ millions de visiteurs en 2021 si on suit le modèle proposé.

# Exercice 4

**Partie A**



**1.** On cherche le coût moyen pour la production de $x = 50$ mètres cube d'engrais. On calcule alors $f(50) = 50 - 15 + \frac{400}{50} = 43$. Le coût moyen quotidien pour la production de 50 mètres cubes d'engrais est donc de $\underline{4300\,\text{euros}}$.

**2.** On cherche $x$ tel que $f(x) \leq 35$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} f(x) \leq 35 &\iff x - 15 + \frac{400}{x} \leq 35 \\ &\iff x + \frac{400}{x} \leq 35 + 15 = 50 \\ &\iff \frac{x^2 + 400}{x} \leq 50 \\ &\iff x^2 + 400 \leq 50x \qquad (x \geq 0) \\ &\iff x^2 - 50x + 400 \leq 0 \end{aligned}$$

Or, $x^2 - 50x + 400$ est un polynôme de degré 2, de discriminant $\Delta = 50^2 - 4 \times 1 \times 400 = 900$ et de racines $x_1 = 10$ et $x_2 = 40$ (*cf* cours pour les formules donnant les racines). Alors finalement, $f(x) \leq 35 \iff \underline{x \in [10; 40]}$.
Pour avoir un coût moyen quotidien de production inférieur ou égal à 3500 euros, il faut donc produire entre 10 et 40 mètres cube d'engrais.

### Partie B

**1.** Soit $x \in [5; 60]$. On a

$$f'(x) = 1 - \frac{400}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{x^2}$$

On retrouve bien l'expression qui est donnée.

**2.** Soit $x \in [5; 60]$. $x^2 - 400 \geq 0 \iff x^2 \geq 400 \iff \underline{x \leq -20 \text{ ou } x \geq 20}$.

**3.** On peut alors en déduire le signe de $f'(x)$, et les variations de $f$ sur $[5; 60]$ :

| $x$ | 5 | | 20 | | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $x^2 - 400$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| signe de $x$ | | $+$ | | $+$ | |
| signe de $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| variations de $f$ | $f(1)$ | $\searrow$ | $f(20)$ | $\nearrow$ | $f(60)$ |

**4.** On peut ainsi remarquer que le coût moyen quotidien sera minimal pour $x = 20$, et sera de $f(20) = 25$ centaines d'euros $\underline{= 2\,500\,\text{euros}}$.

* *
*

Proposé par T. Prévost (thomas.prevost@protonmail.com) pour le site https://www.sujetdebac.fr/