Baccalauréat technologique – Série STMG

Session 2019 (Métropole)

Épreuve de Mathématiques

Proposition de corrigé

Ce corrigé est composé de 5 pages.

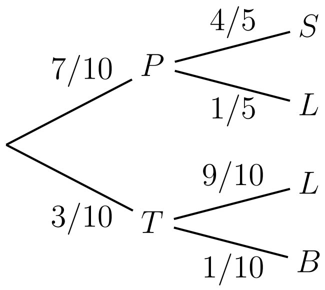
Notations

Dans tout ce corrigé, pour des soucis pratiques, on utilisera les notations suivantes :
$\forall$: « pour tout » ;
$\Longrightarrow$: « implique » ;
$\Longleftrightarrow$: « équivaut à ».
De plus, on notera $\mathbb{P}(A)$ la probabilité de l'événement A et $\mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de l'événement B sachant A.

*
* *

Exercice 1

1. On complète l'arbre pondéré en utilisant les données de l'énoncé :



2. On a alors (probabilités conditionnelles) :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(B) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{100}$$

La probabilité de gagner un bon de réduction est donc $\underline{\mathbb{P}(B) = \frac{3}{100} = 0,03}$.

3. On cherche la probabilité $\mathbb{P}(L)$. Or, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(P \cap L) + \mathbb{P}(T \cap L) = \mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(L) + \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(L) = 0,7 \times \frac{4}{5} + 0,3 \times 0,9 = \frac{41}{100}$$

La probabilité de gagner un panier de produits locaux est donc de $\underline{\mathbb{P}(L) = 0,41}$.

4. On sait que le touriste a gagné un panier de produits locaux à la seconde étape, et on cherche la probabilité qu'il ait gagné un tee-shirt à la première étape, ce qui revient à chercher la probabilité $\mathbb{P}_L(T)$. Or, d'après la formule de Bayes, on a :

$$\mathbb{P}_L(T) = \frac{\mathbb{P}_T(L)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(L)}$$

Alors $\mathbb{P}_L(T) = \frac{0,9 \times 0,3}{0,41} = \frac{27}{41}$. Alors la probabilité que ce touriste ait gagné un tee-shirt est de $\underline{\mathbb{P}_L(T) \approx 0,66}$.

Exercice 2

On note $M(a)$ la masse recyclée à l'année a, en millier de tonnes.

1. Le taux d'évolution global de la masse d'EMPCS recyclés entre 2011 et 2016 est donné par :

$$\tau = \frac{M(2016) - M(2011)}{M(2011)} = \frac{282 - 229}{229} \underline{\approx 0,23}$$

Le taux d'évolution global est donc bien de 23% en arrondissant le pourcentage à l'unité.

2. On cherche le taux d'évolution annuel moyen. Sachant que le coefficient multiplicateur global est de 1,23 pendant 5 ans. Il suffit de réaliser le calcul $\tau_A = 1,23^{1/5} = 1,0423$.
   Le taux d'évolution annuel moyen vaut donc $\underline{\tau_A = 4,23\%}$.
3. À partir de 2016, on a $\tau_A = 4,2\%$. Aussi, à l'année $(n+1)$, on aura la masse de l'année n à laquelle on aura rajouté $4,2\%$ de cette dernière.
   Alors on aura, pour tout n entier,
   $$u_{n+1} = u_n + 0,042u_n = (1+0,042)u_n = 1,042u_n$$
   et donc finalement,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_{n+1} = 1,042u_n}$$
   La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $\underline{q = 1,042}$ et premier terme $u_0 = 282$.
4. La suite (u_n) étant géométrique, il vient immédiatement (formule du cours) :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n \underline{= 282 \times 1,042^n}$$
5. On calcule $M(2019) = u_3 = 282 \times 1,042^3 \approx 319$. La masse d'EMPCS recyclés en 2019 sera donc d'environ $\underline{M(2019) = 319 \text{ milliers de tonnes}}$.
6. On cherche le rang N tel que $u_N > 2u_0$. On complète alors l'algorithme en conséquence :

```
N ⟵ 0
U ⟵ 282
Tant que U< 2 × 282 #on répète tant que u_N < 2 × u_0
    N ⟵ N + 1
    U ⟵ 1,042 × U
Fin Tant que
```

Exercice 3

On note les événements : $p =$« l'oeuf est petit », $m =$« l'oeuf est moyen », $g =$« l'oeuf est gros » et $t =$« l'oeuf est très gros ».

La masse peut être modélisée par la variable aléatoire X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(60; \sigma^2)$.

1. On a, par définition de l'évènement complémentaire :
   $$\mathbb{P}(\bar{p}) = \mathbb{P}(X \geq 53) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 53) = 1 - 0,16 = 0,84$$
   L'oeuf ne sera donc pas classé dans la catégorie « Petit » avec une probabilité $\underline{\mathbb{P}(\bar{p}) = 0,84}$.
2. On sait, l'espérance valant 60, que $\mathbb{P}(X \leq 60) = \mathbb{P}(X \geq 60) = 0,5$. Aussi, on aura
   $$\mathbb{P}(X \leq 53) + \mathbb{P}(53 \leq X \leq 60) = 0,5 \implies \mathbb{P}(53 \leq X \leq 60) = 0,5 - \mathbb{P}(X \leq 53)$$
   D'où, $\mathbb{P}(53 \leq X \leq 60) = 0,5 - 0,16 \underline{= 0,34}$.
3. On en déduit alors que
   $$\mathbb{P}(m) = \mathbb{P}(53 \leq X \leq 63) = \mathbb{P}(53 \leq X \leq 60) + \mathbb{P}(60 \leq X \leq 63) = 0,34 + 0,17 = 0,51$$
   Un oeuf sera donc classé dans la catégorie « Moyen » avec une probabilité $\underline{\mathbb{P}(m) = 0,51}$.
4. De même que précédemment, on sait que $\mathbb{P}(X \geq 60) = 0,5$. Aussi, on obtient que :
   $$\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(X \geq 73) = 0,5 - \mathbb{P}(60 \leq X \leq 63) - \mathbb{P}(63 \leq X \leq 73) = 0,5 - 0,3 - 0,17 = 0,03$$
   La probabilité qu'un oeuf soit classé dans la catégorie « Très gros » vaut donc $\underline{\mathbb{P}(t) = 0,03}$.

Exercice 4

Remarque : ***sur le sujet original, les points placés sur le graphique en annexe ne sont pas raccord avec les données du tableau. On redonne alors dans ce corrigé les points après rectification.***

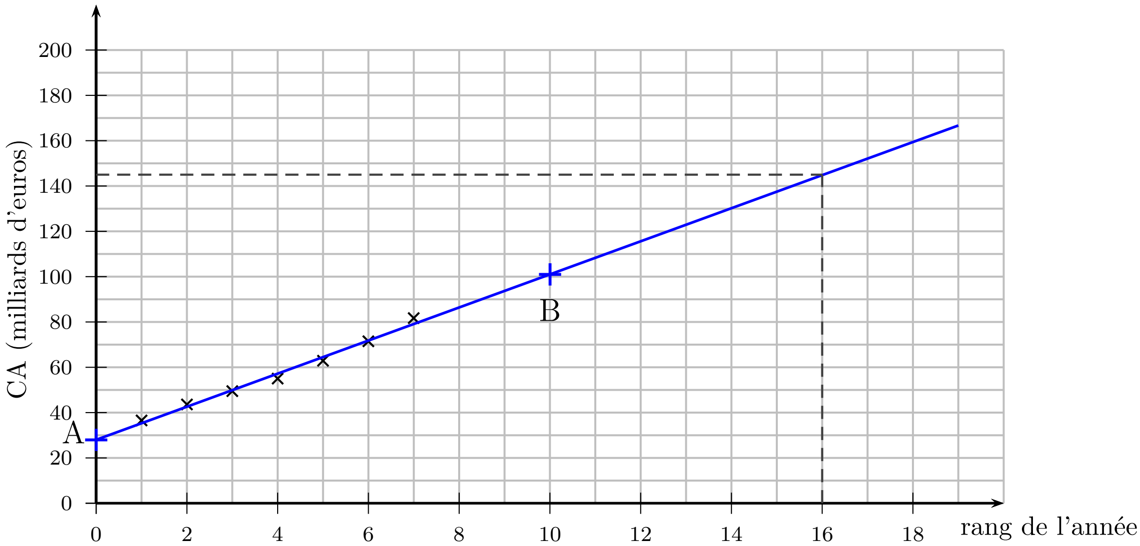
Partie A : étude du chiffre d'affaires du e-commerce

1. On veut obtenir la régression linéaire de y en x. La calculatrice donne alors :

$$\boxed{y = 7,31x + 27,99}$$

2. On suppose que le nuage de points peut être ajusté par la droite (D) : $y = 7,3x + 28$. On veut alors la représenter sur le graphe. Pour cela, on choisit deux points lui appartenant et on les relie.

Par exemple, $A(0; 28)$ et $B(10; 101)$ appartiennent à la droite. On trace alors cette dernière :



3. On peut alors calculer, par ce modèle, le chiffre d'affaires du e-commerce pour l'année 2026 (année de rang $x_i = 16$). Ce dernier sera de $7,3 \times 16 + 28$ $\underline{= 144,8 \text{ milliards de dollars}}$.

Partie B : étude du chiffre d'affaires du m-commerce

1. a) On a, en 2017, $\frac{16,8}{81,7} \approx 0,21$. Le CA du m-commerce représentait donc bien environ 21 % du CA du e-commerce en 2017.

b) Entre 2011 et 2017, on observe un taux d'évolution global qui vaut :

$$\tau = \frac{CA(2017) - CA(2011)}{CA(2011)} = \frac{16,8 - 0,4}{0,4} = 41$$

Le chiffre d'affaires du m-commerce a donc augmenté entre 2011 et 2017 non pas de 41 %, mais bien de 4100 % !!

2. Soit $f : x \mapsto 0,5x^2 - 1,2x + 1,3$ définie sur $[1; 20]$, représentant le CA du m-commerce pour l'année $(2010+x)$. On cherche ici à confirmer ou rejeter l'affirmation de l'observateur économique. On va alors, à partir du modèle de la partie A, calculer le CA du e-commerce en 2026, puis calculer celui du m-commerce en 2026 grâce au modèle donné ci-dessus. Ce qui permettra de comparer ces derniers.

Pour le e-commerce : on a $CA_e(2026) = 7,3 \times 16 + 28 = 144,8$ milliards d'euros ;

Pour le m-commerce : on a $CA_m(2026) = 0,5 \times 16^2 - 1,2 \times 16 + 1,3 = 110,1$ milliards d'euros.

On aura alors $\frac{CA_m(2026)}{CA_e(2026)} = \frac{110,1}{144,8} \approx 0,76$. L'affirmation de l'observateur économique est donc exacte : en 2026, la part du chiffre d'affaires du m-commerce dans celui du e-commerce sera, au regard des modèles proposés, supérieure à 76 %.

* *
*

Proposé par T. Prévost (thomas.prevost@protonmail.com) pour le site https://www.sujetdebac.fr/