Baccalauréat technologique – Série STMG

Session 2019 (Polynésie)

Épreuve de Mathématiques

Proposition de corrigé

Ce corrigé est composé de 8 pages.

Notations

Dans tout ce corrigé, pour des soucis pratiques, on utilisera les notations suivantes :
$\forall$: « pour tout » ;
$\Longrightarrow$: « implique » ;
$\Longleftrightarrow$: « équivaut à ».

*
* *

Exercice 1

Remarque : cet exercice est un QCM, pour lequel il n'est pas demandé de justifier les réponses. Aussi, les justifications données le sont à titre purement informatif, et ne devaient pas figurer sur la copie.

1. Réponse A).

Justification :

Soit on trouve directement à la calculatrice, soit on remarque que :

$$p(X \geq 14) = 0,5 - p(12 \leq X \leq 14) = 0,5 - p(\mu \leq X \leq \mu+\sigma) = 0,5 - \frac{1}{2}p(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma)$$

et on sait (cf cours) que $p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,68$. *On retrouve alors bien* $p(X \geq 14) = 0,16$.

2. Réponse A).

Justification :

On cherche un intervalle de confiance à 95 %. Ici, on a une fréquence $f = \frac{112}{400} = 0,28$ *et une population de taille* $n = 400$. *On en déduit :*

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,28 - \frac{1}{\sqrt{400}}; 0,28 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] \underline{= [0,23; 0,33]}$$

3. Réponse C).

Justification :

(V_n) *est une suite géométrique, de raison* $q = 1,2$ *et premier terme* $V_1 = 6$. *(attention : le premier terme porte l'indice 1, pas 0 ! Il faudra donc ré-indicer par* $n' = n - 1$. *Alors* V_6 *sera le terme de rang* $n' = 5$*)*

On peut alors écrire la suite (V_n) *:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = 6 \times 1,2^{n-1}$$

Il vient alors $V_6 = 6 \times 1,2^5 \approx 14,9$.

4. Réponse C).

Justification :

La suite (V_n) *est la même qu'à la question précédente. On a alors deux méthodes pour répondre :*

— méthode 1 : *on rentre l'algorithme sur la calculatrice et on le fait tourner, puis on remarque qu'il sort bien* $n = 11$ *;*

— *méthode 2 : on résout par le calcul, en cherchant n tel que $V_n \geq 31$.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} V_n \geq 31 &\iff 6 \times 1,2^{n-1} \geq 31 \\ &\iff 1,2^{n-1} \geq \frac{31}{6} \\ &\iff (n-1)\ln(1,2) \geq \ln(31) - \ln(6) \end{aligned}$$

(le log népérien est croissant donc conserve le sens de l'inégalité, et $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$)

$$\begin{aligned} &\iff n - 1 \geq \frac{\ln(31) - \ln(6)}{\ln(1,2)} \\ &\iff n \geq \frac{\ln(31) - \ln(6)}{\ln(1,2)} + 1 \approx 10,007 \end{aligned}$$

D'où, $V_n \geq 31 \iff n \geq 11$.

5. Réponse C).

Justification :

On sait que (U_n) est arithmétique, de premier terme U_0 que l'on cherche, et de raison $q = 3$.
On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + 3n$$

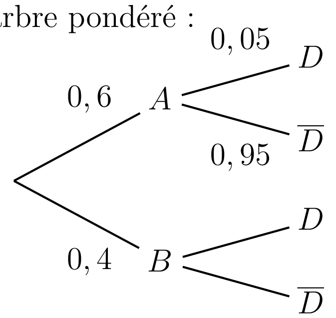
De plus, on sait que $U_4 = U_0 + 3 \times 4 = 81$. Alors il vient : $U_0 = U_4 - 12 = 91 - 12 = 69$.

Exercice 2

Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, on a $P(A) = 0,6$; $P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$; $P_A(D) = 0,05$ et $P(B \cap D) = 0,01$.

2. On modélise la situation par un arbre pondéré :



a) On en déduit que $P(A \cap D) = P(A)P_A(D) = 0,6 \times 0,05 = 0,03$
La probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication vaut donc $\underline{P(A \cap D) = 0,03}$.

b) On peut alors en déduire la probabilité $P(D)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0,03 + 0,01 = 0,04$$

La probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est donc bien de $\underline{P(D) = 0,04}$.

On cherche la probabilité $P_B(D)$. Or, d'après la formule de Bayes :

$$P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{0,01}{0,4} = 0,025$$

Un stylo provenant de l'atelier B aura donc un défaut de fabrication avec une probabilité $\underline{P_B(D) = 0,025}$.

Partie B

1. La loi binomiale a pour paramètres $n = 25$ et $p = 0,04$: $X \hookrightarrow \mathcal{B}(25; 0,05)$.

2. On calcule alors la probabilité qu'aucun stylo ne soit défectueux :

$$P(X = 0) = \binom{25}{0} \times 0,04^0 \times (1 - 0,04)^{25-0} = \binom{25}{0} \times 1 \times 0,96^{25} = 1 \times 1 \times 0,96^{25}$$

D'où $P(X = 0) = 0,96^{25} \underline{= 0,36 < 0,5}$. Ce résultat peut également être trouvé directement à la calculatrice en utilisant la fonction de la loi binomiale. Le directeur de l'entreprise se trompe donc : il y a moins d'une chance sur deux que le paquet ne contienne aucun stylo défectueux.

Exercice 3

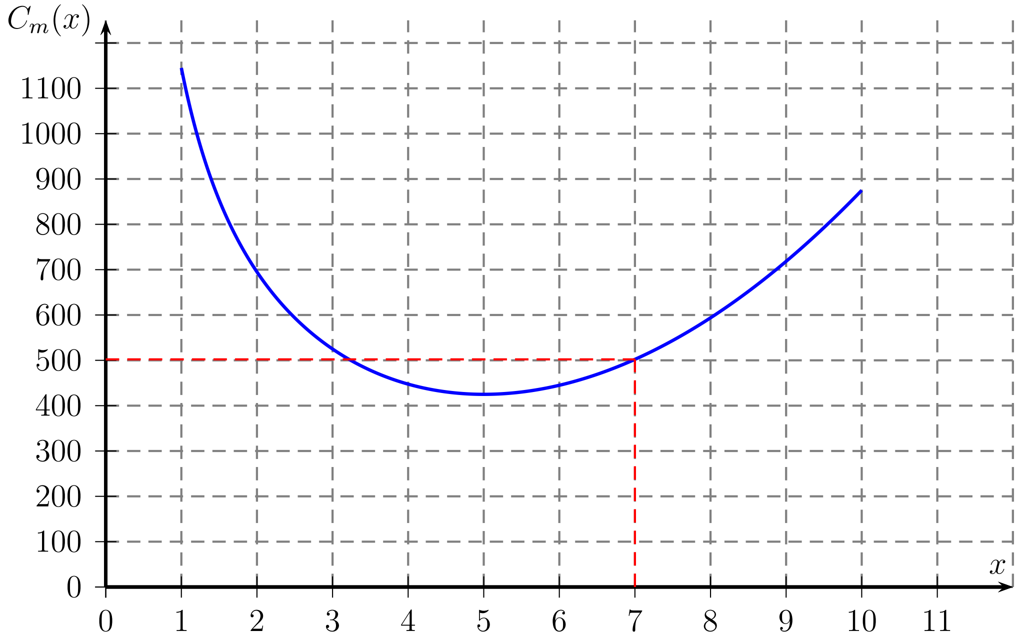
$$C : x \mapsto 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

Partie A : lectures graphiques

On définit le coût moyen :

$$C_m : x \mapsto \frac{C(x)}{x}$$

1. Par lecture graphique, on lit $C_m(7) \approx 500$.



2. On dresse le tableau de variations à partir du graphe :

x	1	5	10
variations de C_m	1130 ↘	420 ↗	880

3. On remarque donc que le coût moyen de production sera minimal pour $x = 5$ km.

Partie B : étude du bénéfice

1. Chaque kilomètre de tissu se vend au prix de 680 euros. Aussi, pour x kilomètres de tissu vendus, on aura une recette qui vaudra $\underline{R(x) = 680x}$.

2. On définit le bénéfice comme étant la différence entre la recette et le coût. Aussi, on a :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750$$

On retrouve alors bien $\underline{B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750}$.

3. Soit $x \in [1; 10]$.

$$B'(x) = 3 \times (-15)x^2 + 2 \times 120x + 180 = -45x^2 + 240x + 180$$

4. a) On souhaite dresser le tableau de signe de $B'(x)$. On va d'abord chercher à résoudre l'équation $B'(x) = 0$.

On remarque alors que $B'(x)$ est un polynôme de degré 2, de déterminant $\Delta = 240^2 - 4 \times (-45) \times 180 = 90000$. L'équation $B'(x) = 0$ admettra donc deux solutions réelles x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{-240 - \sqrt{90000}}{-90} = 6 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-240 + \sqrt{90000}}{-90} = -\frac{2}{3}$$

On peut ainsi en déduire le tableau de signe de $B'(x)$ sur $\mathbb{R}$, en se rappelant qu'un polynôme de degré 2 est du signe de son coefficient dominant, sauf entre ses racines :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		6		$+\infty$
signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) On désire maintenant le signe de $B'(x)$ sur le domaine $[1; 10]$. On le déduit de la question précédente :

x	1		6		10
signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	

5. On en tire alors les variations de B sur $[1; 10]$:

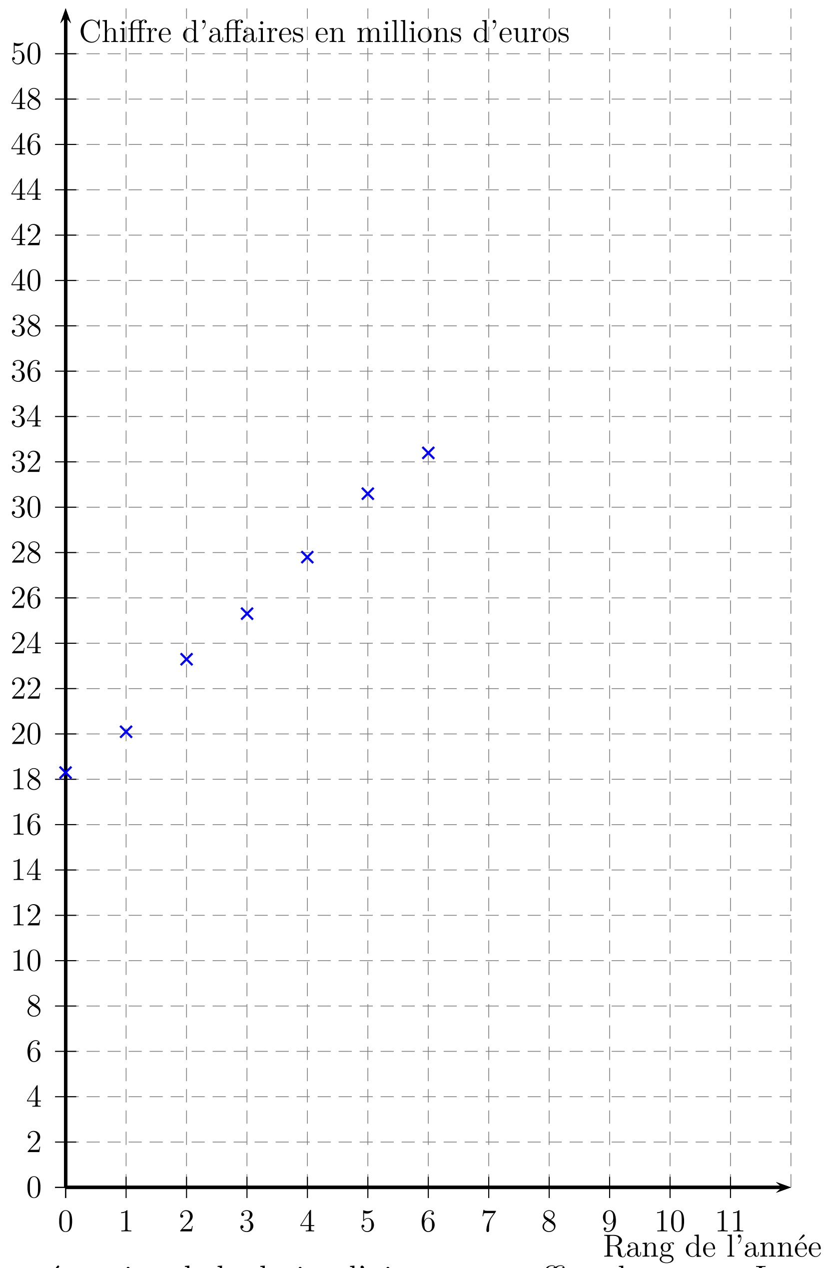
x	1		6		10
signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de B	$B(1)$	$\nearrow$	$B(6)$	$\searrow$	$B(10)$

6. Le bénéfice sera donc maximal pour $x = 6$ kilomètres, et vaudra : $\underline{B(6) = 1410\,\text{euros}}$.

Exercice 4

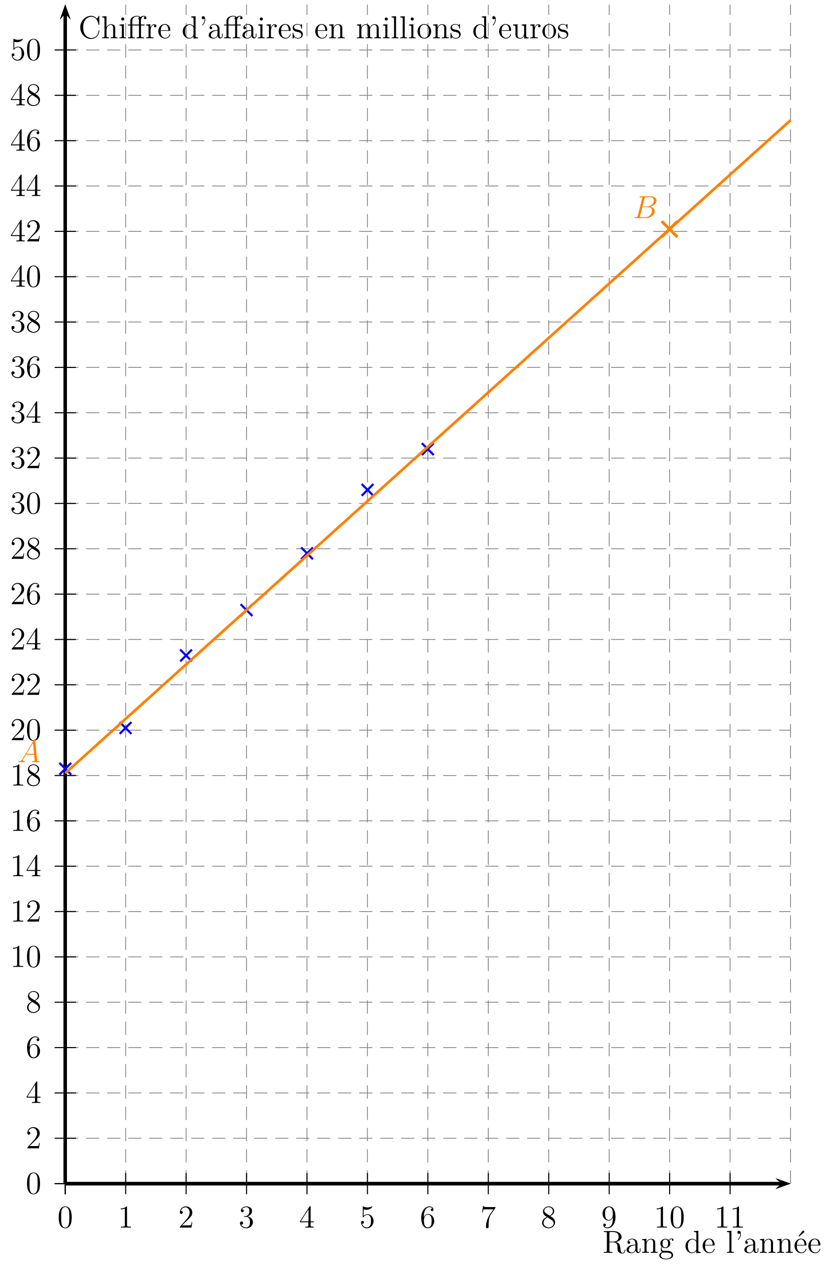
Partie A : étude d'un premier modèle

1. On représente, sur le graphique, le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$:



2. a) On cherche une équation de la droite d'ajustement affine de y en x. La calculatrice donne $\boxed{y = 2,42x + 18,14}$.

b) On choisit finalement la droite (d) : $y = 2,4x+18,1$. On trace cette droite sur le graphique, en choisissant deux points lui appartenant (par exemple $A(0; 18,1)$ et $B(10; 42,1)$) puis en les reliant pour tracer la droite :



3. En 2020 ($x = 10$), le chiffre d'affaires sera de $y(x = 10) = 2,4 \times 10 + 18,1 \underline{= 42 \text{ millions d'euros}}$.

Partie B : étude d'un second modèle

1. On calcule, à partir du tableau, le taux d'évolution global du chiffre d'affaires entre 2010 et 2016 :

$$\tau = \frac{y(x = 6) - y(x = 0)}{y(x = 0)} = \frac{32,4 - 18,3}{18,3} = 77,05\,\%$$

Le taux d'évolution global entre 2010 et 2016 vaut donc $\underline{\tau = 77,05\,\%}$.

2. On en déduit le taux d'évolution annuel moyen sur cette période :

$$\tau_A = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{77,05}{6} \underline{= 13\,\%}$$

3. On suppose que le taux d'évolution annuel sera de 10 % entre 2016 et 2020. On peut alors modéliser le chiffre d'affaires de l'année $(2016 + n)$ par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 32,4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 0,1u_n = 1,1u_n \end{cases}$$

Il vient alors la formule donnant u_n en fonction de n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n = 32,4 \times 1,1^n}$$

D'où, en 2020, le chiffre d'affaires sera de $u_4 = 32,4 \times 1,1^4$ $\underline{= 47 \text{ millions d'euros}}$. Ce qui est globalement assez proche du résultat obtenu à l'issue de la partie A.

* *
*

Proposé par T. Prévost (thomas.prevost@protonmail.com) pour le site https://www.sujetdebac.fr/