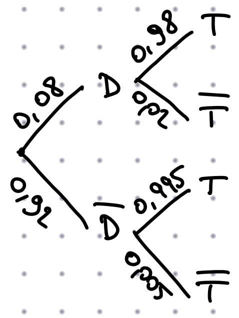
Spécialité mathématiques - Sujet 2021 - Amérique du Nord 1

Exercice 1

Partie A

1)



2) $\{D;\overline{D}\}$ est un système complet d'évènement fini de probabilités non nulle ($P(D)\neq 0$ et $P(\overline{D})\neq 0$).
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(T) = P(D\cap T) + P(\overline{D}\cap T)$
$= P(D)\times P_D(T) + P(\overline{D})\times P_{\overline{D}}(T)$
$= 0{,}08\times 0{,}98 + 0{,}92\times 0{,}05$

$P(T) = 0{,}083$

3) a) On cherche à calculer $P_T(D)$.
Comme $P(T)\neq 0$ (q°2), on a

$P_T(D) = \dfrac{P(T\cap D)}{P(T)}$
$= \dfrac{P(D)\times P_D(T)}{P(T)}$
$= \dfrac{0{,}08\times 0{,}98}{0{,}083}$

$P_T(D) \simeq 0{,}944$

b) D'après la q°2a : $P_T(D) = 0{,}944 < 0{,}950$ donc la condition de commercialisation n'étant pas vérifiée, le test ne pourra pas être vendu.

Partie B

1) a) On réalise une répétition de 5 épreuves de Bernoulli de manière identique et indépendantes dont le succès "l'athlète présente un test positif" a pour probabilité 0,103.
X est la variable aléatoire comptant le nombre de succès, donc X suit une loi binomiale :

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(5;0{,}103)$

b) X suivant une loi binomiale, on a :

$E(X) = 5\times 0{,}103$

$E(X) = 0{,}515$

Sur un très grand nombre de groupe de cinq athlètes testés, la moyenne des athlètes testés positivement sera de 0,515.

c) $P(X\geq 1) = 1 - P(X<1)$
$= 1 - P(X=0)$
$= 1 - \binom{5}{0} 0{,}103^0 \times 0{,}897^5$
$= 1 - 0{,}897^5$

$P(X\geq 1) \simeq 0{,}419$

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n;0{,}103)$.

$P(X\geq 1)\geq 0{,}75 \iff 1-P(X=0)\geq 0{,}75$
$\iff 1-0{,}897^n \geq 0{,}75$
$\iff 0{,}897^n \leq 0{,}25$
$\iff n\ln(0{,}897)\leq \ln(0{,}25)$
(par stricte croissance de la fonction $x\longmapsto \ln(x)$)
$\iff n \geq \dfrac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}897)}$
(car $\ln(0{,}897)<0$)

On doit donc prendre $n\geq 13$ pour que la probabilité qu'au moins un athlète soit positif soit supérieure à 0,75.

Exercice 2

1) Selon le modèle, on a :
- en 2021 : $u_1 = 0{,}4095$
- en 2022 : $u_2 \simeq 0{,}288$

(u_n) semble décroissante.

2) f est dérivable sur $[0;1]$ comme produit de fonction qui le sont :
$\forall x\in[0;1]$, $f'(x) = 0{,}75(1-0{,}15x) + 0{,}75x\times(-0{,}15)$
ie $\forall x\in[0;1]$, $f'(x) = -0{,}225x + 0{,}75$

x	0		1
$f'(x)$		+	
f	0	↗	0,6375

3) Soit $x\in[0;1]$.

$f(x) = x \iff 0{,}75x(1-0{,}15x) = x$
$\iff 0{,}75x(1-0{,}15x) - x = 0$
$\iff x(0{,}75(1-0{,}15x)-1) = 0$
$\iff x(-0{,}1125x - 0{,}25) = 0$
$\iff x = 0$ ou $-0{,}1125x - 0{,}25 = 0$
$\iff x = 0$ ou $x = -\dfrac{2500}{1125} < 0$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=x$ est $\{0\}$.

4) a) Pour tout entier naturel, on considère la proposition P_n : " $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ ".

Montrons que P_n est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Montrons que P_0 est vraie.

On a : $u_0 = 0,6$ et $u_1 = 0,4095$

donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé).

On suppose que P_n est vraie, montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$$

Par stricte croissance de la fonction f sur $[0;1]$ (q° 2), on a :

$$f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

ie $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 0,6375 \leq 1$

Ainsi P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence simple et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$$

b) D'après 4a, (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone elle converge vers un réel l appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

c) On sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = u_{n+1}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette expression, on a :

$$f(l) = l \iff l = 0 \text{ d'après la q° 3.}$$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

5) a) La limite de (u_n) étant 0, cela signifie que d'après ce modèle, le nombre d'individus de cette population va se rapprocher de 0 et donc l'espèce sera menacée d'extinction.

b) La valeur renvoyée est $n = 11$.

Cela signifie qu'en 2031, la population comptera moins de 20 individus et donc sera menacée d'extinction.

Exercice 3

1) Dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD}, \vec{AE})$, on a

$A(0;0;0)$ $\quad$ $K(0;0;1/2)$

$I(1/2;0;1)$ $\quad$ $H(0;1;1)$

Donc :

$$\vec{AI}(1/2;0;1) \text{ et } \vec{KH} = (0;1;1/2)$$

On a $\frac{0}{1/2} \neq \frac{1/2}{1}$, donc $\vec{AI}$ et $\vec{KH}$ ne sont pas colinéaires et donc (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.

2) a) $I(1/2;0;1)$ et $J(1;1/2;0)$

b) $\vec{IJ} = (1/2;1/2;-1)$

$\vec{AE} = (0;0;1)$

$\vec{AC} = (1;1;0)$

On remarque que : $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AE}$

Donc les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$ sont bien coplanaires.

3) Un coefficient directeur de :

- d_1 est $u_1 = (1;-2;3)$
- d_2 est $u_2 = (1;1;2)$

Les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas proportionnelles donc u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.

Ainsi d_1 et d_2 ne sont pas parallèles

4) Un vecteur normal du plan P est $\vec{n} = (1;3;-2)$

On a :

$$\vec{n} \cdot \vec{u_2} = 1\times1 + 3\times1 + 2\times(-2)$$
$$= 0$$

$\vec{n}$ et $\vec{u_2}$ sont donc orthogonaux, et $\vec{n}$ étant normal au plan cela signifie donc que P et d_2 sont parallèles.

5) On a : $\vec{LM} = (1;3;-2) = \vec{n}$

$\vec{LM}$ est donc un vecteur normal de P.

De plus L appartient au plan P car :

$$4 + 3\times0 - 2\times3 + 2 = 0.$$

Donc L est le projeté orthogonal de M sur P.

Exercice A

Affirmation 1 : FAUX

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

$$(e^{a+b})^2 = e^{2(a+b)} = e^{2a+2b} = e^{2a} \times e^{2b}$$

Affirmation 2 : VRAI

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction qui le sont :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -e^x + e^x(3-x)$$

ie $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x(2-x)$

On a donc $f'(0) = e^0(2-0) = 2$

La tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation :
$T : y = f'(0)x + f(0)$

ie $T : y = 2x + f(0)$

Par ailleurs, $f(0) = -2 + (3-0)e^0 = 1$

D'où $T : y = 2x + 1$

Affirmation 3 : FAUX

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x + \frac{3}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(e^x - 1 + \frac{3}{xe^x}\right) = +\infty$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$

d'où par composition $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{3}{X} = 0$.

Affirmation 4 : VRAI

On note $f : x \mapsto 1 - x + e^{-x}$ définie sur $[0;2]$.
f est dérivable sur $[0;2]$ comme somme de fonction qui le sont.

$\forall x \in [0;2],\ f'(x) = -(1+e^{-x}) < 0$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		2
f	2	$\searrow$	$e^{-2}-1$

f est continue et strictement décroissante sur $[0;2]$.
De plus, $f([0;2]) = [e^{-2}-1\,;\,2]$.

Or $0 \in [e^{-2}-1\,;\,2]$, donc d'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle sur $[0;2]$.

Affirmation 5 : VRAI

g est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2x - 5 + e^x$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = 2 + e^x$

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) > 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$)

Donc g est une fonction convexe.

Exercice B

1) • $f(1) = 4$
• $f'(1) = 0$ car le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1 est $f'(1) = 0$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{b/x \times x - 1\times(a + b\ln(x))}{x^2}$$
ie $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{b - a - b\ln(x)}{x^2}$$

3) On a :
$$\begin{cases} f(1) = 4 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b\ln(1) = 4 \\ b - a - b\ln(1) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{4(1+\ln(x))}{x}$

4) • $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} 4 + 4\ln(x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

En effet,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4+4\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} + 4\,\frac{\ln(x)}{x} = 0$$
car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, par croissance comparée

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$.

5) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{-4\ln(x)}{x^2}$ (q° 2)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :
$f(x) \leq 0 \iff -\frac{4\ln(x)}{x^2} \leq 0$

$\iff -4\ln(x) \leq 0 \quad (x^2 > 0)$

$\iff \ln(x) \geq 0 \quad (-4 < 0)$

$\iff x \geq 1$

(par stricte croissance de la fonction $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

6) On sait que f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = \frac{-4/x \times x - 2x(-4\ln(x))}{x^4}$$

ie $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f''(x) = \dfrac{-4 + 8\ln(x)}{x^3}$

7) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f''(x) \geq 0 \iff \frac{-4+8\ln(x)}{x^3} \geq 0$$

$$\iff -4 + 8\ln(x) \geq 0 \quad (x^3 > 0)$$

$$\iff \ln(x) \geq \frac{1}{2}$$

$$\iff e^x \geq e^{1/2}$$

(par croissance stricte de la fonction exponentielle)

Ainsi f est convexe sur $[e^{1/2}; +\infty[$ et concave sur $]0; e^{1/2}[$.

Ainsi il y a un unique point d'inflexion B de coordonnées $(e^{1/2} ; 6e^{-1/2})$.

* * * * *

FIN

* * * * *