Spécialité mathématiques (Asie 1) - BAC 2021

Exercice 1

1) $u_1 = 0,9 u_0 + 250$

$\boxed{u_1 = 1150}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
A l'année 2020+n, on note u_n le nombre d'abonnés.
L'année suivante 10% des abonnés arrêtent de suivre le profil donc il en reste 90% soit $0,9 u_n$.
De plus, à ces abonnés restant s'ajoutent 250 nouveaux.
D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 0,9 u_n + 250}$

3) suite(10) renvoie 1977
Ainsi avec ce modèle, le nombre d'abonnés en 2030 serait de 1977.

4) a) Pour tout entier naturel n, on considère la proposition P_n : " $u_n \leq 2500$ "
Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Montrons que P_0 est vraie.

$u_0 = 1000 \leq 2500$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé). On suppose que P_n est vraie, montrons que P_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a :

$$u_n \leq 2500$$
$$\Leftrightarrow 0,9 u_n \leq 2250 \quad (0,9>0)$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1} \leq 2500$$

Donc P_n est vraie.

Conclusion : P_n est vraie pour tout n entier naturel par principe de récurrence simple et on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq 2500}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = 0,9 u_n + 250 - u_n$$
$$= -0,1 u_n + 250.$$

Or d'après 4a, on sait que :

$$u_n \leq 2500$$
donc $-0,1 u_n \geq -250$
donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante}}$

c) (u_n) est croissante et majorée par 2500 donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2500$$
$$= 0,9 u_n + 250 - 2500$$
$$= 0,9 u_n - 2250$$
$$= 0,9 (u_n - 2500)$$
$$= 0,9 v_n$$

(v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme :
$v_0 = u_0 - 2500 = -1500$

b) D'après 5a, on peut dire que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times 0{,}9^n$

ie $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -1500 \times 0{,}9^n}$

De plus, on sait que pour tout n entier naturel, on a : $v_n = u_n - 2500$

d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2500 - 1500 \times 0{,}9^n}$

c) Comme $0{,}9 \in]-1;1[$, on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2500}$

Ainsi le nombre d'abonnés de cette influenceuse ne dépassera pas les 2500.

6)
```
def abonnes ( ) :
    n=0
    while suite (n) < 2200 : # rappel fonction q°3
        n = n+1
    return n+2020
```

En exécutant ce script, on en conclue que le nombre d'abonnés dépassera les 2200 en 2036.

Vérification par le calcul

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_n \geq 2200 \iff 2500 - 1500 \times 0{,}9^n \geq 2200$

$\iff 0{,}9^n \leq 1/5$ (car $1500 > 0$)

$\iff n \ln(0{,}9) \leq -\ln(5)$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}$)

$\iff n \geq -\dfrac{\ln(5)}{\ln(0{,}9)}$ (car $\ln(0{,}9) < 0$).

Or $-\dfrac{\ln(5)}{\ln(0{,}9)} \approx 15{,}3$.

C'est donc bien en 2036 que le nombre d'abonnés dépassera 2200.

Exercice 2

Partie 1

1) On a :

* $\vec{AP} = \frac{3}{4}\vec{AB} = \frac{3}{4} \times 8\vec{i} = 6\vec{i}$

donc $\boxed{P(6;0;0)}$

* $\vec{AQ} = \frac{3}{4}\vec{AE} = \frac{3}{4} \times 8\vec{k} = 6\vec{k}$

donc $\boxed{E(0;0;6)}$

2) On a : $\vec{PQ} = (-6;0;6)$ et $\vec{PR} = (2;2;8)$ deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (PQR).

On calcule :

* $\vec{PQ} \cdot \vec{n} = -6 \times 1 - 5 \times 0 + 6 \times 1 = 0$
* $\vec{PR} \cdot \vec{n} = 2 \times 1 + 2 \times (-5) + 8 \times 1 = 0$

$\boxed{\vec{n} \text{ est donc normal au plan}}$ (PQR) (car orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (PQR))

3) $\vec{n}$ étant normal à (PQR), on a l'équation cartésienne de (PQR) :

$x - 5y + z + d = 0 \quad (d \in \mathbb{R})$

Or on sait que $P \in (PQR)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation et on obtient $d = -6$

Ainsi une équation cartésienne de (PQR) est :
$\boxed{x - 5y + z - 6 = 0}$

Partie II

1) Ω est le milieu de $[EC]$ et on sait que $E(0;0;8)$ et $C(8;8;0)$.
Ainsi Ω a pour coordonnées : $\left(\frac{8+0}{2}; \frac{0+8}{2}; \frac{8+0}{2}\right)$

ie $\boxed{\Omega(4;4;4)}$

2) d est perpendiculaire au plan (PQR), donc un vecteur directeur de d est $\vec{n}(1;-5;1)$.
De plus $\Omega \in d$.
Donc une représentation paramétrique de d est :

$$\boxed{d : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 - 5t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

3) d étant perpendiculaire à (PQR) et L le projeté orthogonal de Ω sur (PQR), cela implique que L est le point d'intersection entre d et (PQR).
Montrons que le point de coordonnées $(14/3 ; 2/3 ; 14/3)$ correspond au point L.

* Si on pose $t = 2/3$, alors
$\begin{cases} x = 14/3 \\ y = 2/3 \\ z = 14/3 \end{cases}$
Donc $(14/3 ; 2/3 ; 14/3) \in d$

* $\frac{14}{3} - 5 \times \frac{2}{3} + \frac{14}{3} - 6 = 0$
Donc $\boxed{(14/3 ; 2/3 ; 14/3) \in (PQR)}$

Ainsi les coordonnées de L, le projeté orthogonal de Ω sur (PQR) sont : $\boxed{L(14/3 ; 2/3 ; 14/3)}$

4) La distance de Ω au plan (PQR) correspond à ΩL ie $\|\vec{\Omega L}\|$.
On a $\vec{\Omega L}(2/3 ; -10/3 ; 2/3)$
Donc $\|\vec{\Omega L}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$
$= \sqrt{108/9}$
$= \sqrt{108}/3$
$\boxed{\|\vec{\Omega L}\| = 2\sqrt{3}}$
La distance de Ω au plan (PQR) est donc de $2\sqrt{3}$ cm.

Exercice 3

1) a) Le tirage étant simultanné, il y a $\binom{8}{2}$ tirages possibles, c'est à dire $\boxed{28 \text{ tirages possibles}}$

b) Il y a $\binom{6}{1} \times \binom{2}{1} = 12$ tirages gagnants.

Nous avons une situation d'équiprobabilité (boules tirées au hasard et supposées identiques)
Ainsi $\boxed{\text{la probabilité que le joueur gagne est de } \frac{12}{28} = \frac{3}{7}}$

2) a) Soit k un entier naturel correspondant à la mise du joueur.
Ainsi $G(\Omega) = \mathbb{Z}$.
- Si le joueur est gagnant : $\boxed{G = 10 - k}$
- Si le joueur perd : $\boxed{G = -k}$.

b) Le jeu est favorable si l'espérance de G est positive ou nulle, ie :
$E(G) > 0 \Leftrightarrow 3/7\,(10-k) + 4/7 \times (-k) > 0$
$\Leftrightarrow 30/7 > k$

Or $30/7 \approx 4,3$

Donc pour que le jeu reste favorable, le joueur ne doit pas payer plus de 4 euros

3) a) On répète 10 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante (lettres remises dans le sac) dont le succès "le joueur gagne" a pour probabilité 3/4.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès donc X suit une loi Binomiale de paramètre :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(10 ; 3/7)}$$

b) $P(X=4) = \binom{10}{4}\left(\frac{3}{7}\right)^4\left(\frac{4}{7}\right)^6$

$\boxed{P(X=4) = 0,247}$

La probabilité d'avoir 4 gagnants est de 0,247

c) $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X<5)$
$= 1 - P(X=4)$
$\boxed{P(X \geqslant 5) = 0,753}$

La probabilité d'avoir au moins 5 vainqueurs est de 0,753.

d) A la calculatrice, on a :
$P(X \leqslant 5) = 0,78$
$P(X \leqslant 6) = 0,92$

Ainsi le plus petit entier naturel tel que $P(X \leqslant n) > 0,9$ est 6.

Exercice A

Partie I

1) f et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en 0 étant $f'(0)$, par lecture graphique on a $\boxed{f'(0) = 0,4}$

2) a) f' est décroissante sur $]-\infty ; -2]$ et sur $[1 ; +\infty[$
f' est croissante sur $[-2 ; -1]$

b) f est convexe sur un intervalle si pour tout x réel de cet intervalle $f''(x) > 0$.
Or f' est croissante sur $[-2 ; 1]$, cela implique que pour tout $x \in [-2 ; 1]$, $f''(x) > 0$
Ainsi $\boxed{f \text{ est convexe sur } [2 ; 1]}$

Partie II

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(x^2 + x + 5/2\right)$
$= \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right)\right)$
$= \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X)$, par composition car $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{2x^2} = 0$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

De la même manière, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions qui le sont.

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+5/2}}$

3)

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
$x^2+x+5/2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\ln(9/4)$	↗	$+\infty$

$f(-1/2) = \ln(1/4 - 2/4 + 10/4) = \ln(9/4)$

Etude du signe du dénominateur :

$\Delta = -9 < 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 5/2 > 0$.

4) a) f est continue et strictement croissance sur l'intervalle $]-1/2\,;+\infty[$ et $f(]-1/2\,;+\infty[) =]\ln(9/4)\,;+\infty[$.

Or $\ln(9/4) \approx 0,8 < 2$.

Donc $2 \in]\ln(9/4)\,;+\infty[$, ainsi d'après le théorème de la bijection l'équation $\boxed{f(x)=2 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans l'intervalle }]-1/2\,;+\infty[}$

b) A la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha \approx 1,8}$

5) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Etudions le signe de $-2x^2 - 2x + 4$.

$\Delta = 36$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x^2-2x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Comme : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2+x+5/2)^2 > 0$, alors le signe de f'' dépend du numérateur et on a :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{\text{Il y a donc deux points d'inflexion : en } -2 \text{ et en } 1}$

Exercice B

Partie 1

1) a) La fonction f_p définie sur $\mathbb{R}_+$ tel que $\boxed{f_p : x \mapsto 1 \text{ est solution particulière}}$ de l'équation différentielle.

En effet, f_p étant dérivable sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$f'(t) = 0$ et $-0,4 \times 1 + 0,4 = 0 = f'(t)$.

b) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est $\boxed{\{ y : t \mapsto 1 + ke^{-0,4t} \mid k \in \mathbb{R} \}}$

2) On a $g(0) = 10$ ssi $ke^0 + 1 = 10 \iff k + 1 = 10$

$\iff k = 9$

d'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ g(t) = 1 + 9e^{-0,4t}}$

Partie II

1) On a :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} g(t) = 1}$$

car $\lim_{t\to+\infty} 1+e^{-0,4t} = \lim_{x\to-\infty} 1+e^{x} = 1$ (par composition)

D'où $\lim_{t\to+\infty} p(t) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x}$ (par composition)

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} p(t) = 1}$$

2) p est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout t réels positifs $g(t) \neq 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $p'(t) = -\frac{g'(t)}{g(t)^2}$

$$= \frac{-9\times(-0,4)\,e^{-0,4t}}{(1+9e^{-0,4t})}$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R}_+,\ p'(t) = +\frac{3,6\,e^{-0,4t}}{(1+9e^{-0,4t})^2}}$$

3) a) $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $3,6e^{-0,4t} > 0$ et $(1+9e^{-0,4t})^2 > 0$

D'où $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $p'(t) > 0$

$\boxed{\text{Ainsi } p \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$

De plus p est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions qui le sont.

On a $p(\mathbb{R}_+) = [1/10 ; 1[$

Or $1/2 \in [1/10 ; 1[$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $p(t) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+$

b) A la calculatrice, on a $\boxed{\alpha \simeq 5,5}$

Partie III

1) Soit $t\in\mathbb{R}_+$. On a :

$$0,4\,p(t)\,(1-p(t)) = \frac{0,4}{1+9e^{-0,4t}}\left(1 - \frac{1}{1+9e^{-0,4t}}\right)$$

$$= \frac{0,4}{1+9e^{-0,4t}} \times \frac{1+9e^{-0,4t}-1}{1+9e^{-0,4t}}$$

$$= \frac{3,6\,e^{-0,4t}}{(1+9e^{-0,4t})^2}$$

$$= p'(t)$$

$\boxed{p \text{ est donc solution de l'équation différentielle}}$

2) - On a $\lim_{t\to+\infty} p(t) = 1$, cela implique que dans un grand nombre d'année, 100% des écoles des pays en voie de développement auront accès à internet.

- De plus on a $\alpha \simeq 5,5$, cela signifie qu'en milieu d'année 2025, 50% des écoles aura accès à internet

- Enfin $p(0) = 1/10$ reprend le fait qu'en 2020 seulement 10% des écoles ont accès à internet.