Exercice 1

1) Réponse c

Justification : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction qui le sont.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (x^2-2x-3)e^x$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

par positivité de l'exponentielle et $\Delta = 16 > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2-2x-1)\times e^x$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x^2e^x - 2xe^x - e^x$$
$$= 0$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} -2xe^x = 0$ par croissance comparée.

2) Réponse c

Justification : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{5+e^x} = \dfrac{3}{5}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{5+e^x} = 0$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote ho

3) Réponse b

Justification : f'' présente 3 changements de signes donc f admet trois points d'inflexion

4) Réponse a

Justification : pour tout entier naturel n, on a $u_n = f(n)$

avec pour tout x réels $f(x) = x^2 - 17x + 20$

f est une fonction polynomiale avec un coefficient dominant positif $(1>0)$.

Donc f admet un minimum en $\dfrac{17}{2}$ (rappel : abscisse du sommet en $-b/2a$)

Donc (u_n) est minorée.

5) Réponse a

Justification : la boucle while fait que dès que u dépasse la valeur 45, le script s'arrête.

Exercice 2

1) • K est le milieu de $[DC]$, donc $K\left(\frac{0+1}{2} ; \frac{1+1}{2} ; \frac{0+0}{2}\right)$

D'où $\overrightarrow{AK}(1/2 ; 1 ; 0)$

• $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} \Rightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$ (d'après la relation de Chasles)

$\Rightarrow \overrightarrow{AL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD}$

D'où $\overrightarrow{AL}(0 ; 1 ; 3/2)$

2) a) $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (AKL).

On a :

- $\overrightarrow{AK} \cdot \vec{n} = 1/2 \times 6 + 1 \times (-3) + 0 \times 2 = 0$
- $\overrightarrow{AL} \cdot \vec{n} = 0 \times 6 + 1 \times (-3) + 3/2 \times 2 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ donc $\vec{n}$ est normal au plan (AKL)

b) Une équation cartésienne du plan (AKL) est donc : $6x - 3y + 2z + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Trouvons la valeur de c.
Soit $c \in \mathbb{R}$.
$A \in (AKL) \iff 6\times 0 - 3\times 0 + 2\times 0 + c = 0$
$\iff c = 0$.

Ainsi une équation cartésienne du plan (AKL) est : $6x - 3y + 2z = 0$

c) Δ est perpendiculaire à (AKL) donc un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\vec{n}$.
De plus Δ passe par le point $D(0;1;0)$, d'où :

$$\Delta : \begin{cases} x = 6t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

d) • On a en prenant $t = 3/49$

$$\begin{cases} x = 6 \times 3/49 = 18/49 \\ y = 1 - 3 \times 3/49 = 40/49 \\ z = 2 \times 3/49 = 6/49 \end{cases}$$

On retrouve les coordonnées de N, donc $N \in \Delta$

• De plus, on a : $3 \times \frac{18}{49} - 3 \times \frac{40}{49} + 2 \times \frac{6}{49} = \frac{108 - 120 + 12}{49} = 0$

N vérifie l'équation du plan (AKL) donc $N \in (AKL)$

Ainsi N est bien le projeté orthogonal de D sur (AKL)

3) a) $V_{ADKL} = \frac{1}{3} \times \frac{\|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{DK}\|}{2} \times \|\overrightarrow{DL}\|$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1 \times 1/2}{2} \times \frac{3}{2}$ (car $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$)

et $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK} = (1/2 ; 1-1 ; 0)$

si $\|\overrightarrow{DK}\| = \frac{1}{2}$

$V_{ADKL} = \frac{1}{8}$

b) La distance de D au plan (AKL) correspond à la longueur ND.
Or on a : $\vec{ND}(-18/49\ ;\ 9/49\ ;\ -6/49)$

D'où : $ND = \|\vec{ND}\|$

$$= \sqrt{\left(-\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{9}{49}\right)^2 + \left(-\frac{6}{49}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{324+81+36}{49^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{441}}{49}$$

$$= \frac{21}{49}$$

$$\boxed{ND = \frac{3}{7}}$$

c) $\mathcal{V}_{ADKL} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AKL} \times ND \Rightarrow \mathcal{A}_{AKL} = \frac{3 \times \mathcal{V}_{ADKL}}{ND}$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{AKL} = \frac{3 \times 1/8}{3/7} = \frac{3}{8} \times \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_{AKL} = \frac{7}{8}}$$

Exercice 3

1) On assimile cela à un tirage simultané, il y a donc $\binom{9}{3}$ placements possibles soit 84 placements possibles.

2) Il existe 8 tirages gagnants correspondant aux nombres de lignes, colonnes et diagonales de la grilles (3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales).
Les cœurs étant placés au hasard, on est dans une situation d'équiprobabilité, donc en notant V l'événement le ticket est gagnant, on a :

$P(V) = 8/84$

ie $P(V) = 2/21$

3) On définit G la variable aléatoire correspondant au gain.
- Si le joueur gagne : $G = 5 - 1 = 4$ de probabilité $2/21$
- Si le joueur perd : $G = -1$ de probabilité $19/21$

Calculons l'espérance de G.

$E(G) = 4 \times \frac{2}{21} + \frac{19}{21} \times (-1)$

ie $\boxed{E(G) = \frac{-11}{21}}$

$E(G) < 0$ donc le jeu n'est pas favorable au joueur.

4) a) On répète 20 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante, dont le succès "le ticket est gagnant" a pour probabilité $2/21$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès alors
$X \hookrightarrow \mathcal{B}(20\ ;\ 2/21)$

b) $P(X=5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{2}{21}\right)^5 \times \left(\frac{19}{21}\right)^{15}$

ie $P(X=5) \approx 0,027$

La probabilité d'avoir exactement 5 tickets gagnants est de 0,027

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$
$= 1 - P(X=0)$
$= 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^{20}$

ie $P(X \geq 1) \approx 0,865$

La probabilité d'avoir au moins un gagnant est de 0,865.

Exercice A

Partie I

1) $u_1 = u_0 + 0,05 \times (20 - u_0)$

ie $u_1 = 1,95$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$
$u_{n+1} = u_n + 0,05\,(20 - u_n)$
$= u_n + 1 - 0,05\,u_n$

ie $u_{n+1} = 0,95\,u_n + 1$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$v_{n+1} = 20 - u_{n+1}$
$= 20 - 0,95\,u_n - 1$
$= 19 - 0,95\,u_n$
$= 0,95\,(20 - u_n)$

ie $v_{n+1} = 0,95\,v_n$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0 = 19$

c) D'après 2b, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 19 \times 0,95^n$.

Or pour tout entier naturel n, on a : $v_n = 20 - u_n$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 20 - 19 \times 0,95^n$

3) Comme $0,95 \in]-1;1[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 20$

Partie II

1) L est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on a :

$$\forall t \in [0;+\infty[,\ L'(t) = -19 \times (-0{,}05) \times e^{-0{,}05t}$$

ie $\forall t \in [0;+\infty[,\ L'(t) = 0{,}95e^{-0{,}05t}$

Pour tout $t \in [0;+\infty[$, on a :

$$0{,}05(20 - L(t)) = 0{,}05 \times (\cancel{20} - \cancel{20} + 19e^{-0{,}05t})$$
$$= 0{,}95e^{-0{,}05t}$$

ie $0{,}05(20 - L(t)) = L'(t)$

L est donc solution de (E)

De plus $L(0) = 20 - 19e^{0}$

ie $L(0) = 1$

2)a) On a $L'(0) = 0{,}95 \times e^{0} = 0{,}95$

et $L'(5) = 0{,}95 \times e^{-0{,}05 \times 5} \simeq 0{,}74$

D'où $L'(0) > L'(5)$

b) On a $\lim\limits_{t \to +\infty} L(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} 20 - 19e^{-0{,}05t}$

$$= \lim_{X \to -\infty} 20 - 19e^{X}$$

$$= 20$$

Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} L'(t) = 0$

car $\lim\limits_{t \to +\infty} 0{,}05(20 - L(t)) = 0{,}05 \times (20 - 20) = 0$

Ce résultat est bien cohérent avec le modèle exposé en début d'exercice. En effet la vitesse de croissance est dite proportionnelle à l'écart entre la taille du bambou et sa taille maximale. Or en grandissant l'écart diminue jusqu'à être presque nul donc la vitesse de croissance diminue jusqu'à être nulle.

Exercice B

Partie I

1) On a saisi : = B2 - ln(B2-1)

2) (u_n) semble décroissante et converge vers 2.

Partie II

1) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x - \ln(x-1) = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x-1) = \lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$

MS

2) a) f est dérivable sur $]1;+\infty[$.

$\forall x \in]1;+\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1}$

i.e. $\boxed{\forall x \in]1;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}}$

b)

x	1		2		$+\infty$
$x-2$	‖	$-$	0	$+$	
$x-1$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Car $f(2) = 2 - \ln(2-1) = 2$.

f est donc décroissante sur $]1;2]$ et croissante sur $]2;+\infty[$

c) D'après 2b, f admet un minimum sur $[2;+\infty[$ en 2 qui est 2.

Donc $\forall x \geq 2,\ f(x) \geq 2$

Partie III

1) Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: " $u_n \geq 2$ ".
Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

On a $u_0 = 10 \geq 2$
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a :
$u_n \geq 2 \iff f(u_n) \geq 2$ car f est croissante sur $[2;+\infty[$.

$\iff u_{n+1} \geq 2$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n par principe de récurrence simple et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n - 1) - u_n$

$= -\ln(u_n - 1)$

D'après III.1) on a : $u_n \geq 2 \Rightarrow u_n - 1 \geq 1$
$\Rightarrow \ln(u_n - 1) \geq 0$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$)
$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$

(u_n) est donc décroissante.

3) (u_n) est décroissante et minorée par 2 donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge vers un réel l.

4) Soit $L \in]1;+\infty[$.

$$
\begin{aligned}
f(L) = L &\iff L - \ln(L-1) = L \\
&\iff -\ln(L-1) = 0 \\
&\iff \ln(L-1) = 0 \\
&\iff L - 1 = 1 \quad \text{, par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ sur }]1;+\infty[. \\
&\iff L = 2
\end{aligned}
$$

Ainsi (u_n) converge vers 2