Spécialité Mathématiques - Centres étrangers Afrique 1 - 2021

LMS

Exercice 1

(Les justifications seront données dans la correction même si non demandée dans le sujet pour que vous compreniez vos erreurs).

1) Réponse b

Justification : f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont et on a pour tout x réels :

- $f'(x) = 1 \times e^{-2x} + (-2e^{-2x}) \times x$
  $= e^{-2x}(1-2x)$
- $f''(x) = -2e^{-2x}(1-2x) + (-2) \times e^{-2x}$
  $= -2e^{-2x}(1-2x+1)$
  $= -4e^{-2x}(1-x)$

$$\boxed{f''(x) = 4e^{-2x}(x-1)}$$

Rappel : ici on a une dérivée du type $u \times v$ donc $(u \times v)' = u'v + v'u$ et surtout pas $u' \times v'$! (erreur classique)

2) Réponse c

Justification : il y a 3 possibilités parmi 12, il s'agit ici d'une combinaison, soit $\binom{12}{3}$ possibilités $= \boxed{220 \text{ possibilités}}$

3) Réponse b

Justification : D'après le graphique de f', on a

x	0		2		5		7
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

Rappel : Bien associer le signe de f' aux variations de f et NON les variations de f' aux variations de f.

4) Réponse b

Justification : On extrait de l'énoncé
- $P(A) = 0,028$
- $P(B) = 0,022$
- $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,954$

On a $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,954 = 0,046$

Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
$= 0,028 + 0,022 - 0,046$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0,004}$$

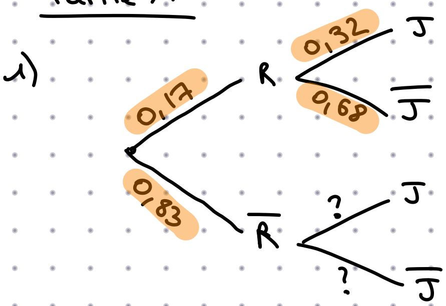
5) Réponse b

Justification :
- f est croissante sur $]-\infty ; -1]$, donc f' est positive sur cet intervalle
- f est décroissante sur $[-1 ; +\infty[$, donc f' est négative sur cet intervalle

Exercice 2

Partie A

1)



2) On a :

$P(R \cap J) = P(R) \times P_R(J)$

$= 0,17 \times 0,32$

$P(R \cap J) = 0,054$

3) $\{R ; \overline{R}\}$ est un système complet d'évènement de probabilité non nulle (on peut également dire que les évènements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers de probabilité non nulle)

donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(J) = P(R \cap J) + P(\overline{R} \cap J)$$

donc :

$$P(\overline{R} \cap J) = P(J) - P(R \cap J)$$
$$= 0,11 - 0,054$$
$$P(\overline{R} \cap J) = 0,056$$

4) On a $P(\overline{R}) = 0,83 \neq 0$, donc

$$P_{\overline{R}}(J) = \frac{P(\overline{R} \cap J)}{P(\overline{R})}$$

$$= \frac{0,056}{0,83}$$

$$P_{\overline{R}}(J) = 0,067$$

Remarque : il est possible de répondre à cette question sans avoir fait les autres !

Partie B

1) On réalise 50 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique (au hasard) et indépendante (tirage avec remise) dont le succès est l'évènement R : "la personne utilise régulièrement les transports en commun" qui a pour probabilité 0,17.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres : $n = 50$ et $p = 0,17$.

ie $X \hookrightarrow \mathcal{B}(50 ; 0,17)$

2) $P(X=5) = \binom{50}{5} \times 0,17^5 \times 0,83^{45}$

$P(X=5) = 0,069$

La probabilité d'avoir 5 personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 est de 0,069.

3) A la calculatrice on obtient $P(X \leqslant 13) = 0,964$
Donc $P(X \leqslant 13) > 0,95$
L'affirmation du recenseur est donc vraie.

4) On cherche à calculer l'espérance de X.
On a
$$E(X) = n \times p$$
$$= 50 \times 0,17$$
$$E(X) = 8,5$$

Parmi ces 50 personnes interrogées, il y a en moyenne 8,5 personnes qui utilisent régulièrement les transports en commun.

Exercice 3

1) En juin 2020, 85 % des collaborateurs en télétravail en mai 2020 choisissent de rester en télétravail et 450 nouveaux collaborateurs s'y ajoutent.
d'où
$$a_1 = 0,85\, a_0 + 450$$
$$a_1 = 0,85 \times 200 + 450$$
$$a_1 = 620$$

2) A l'année $n+1$, on a :
- 85 % des collaborateurs du mois n qui restent en télétravail
- 450 nouveaux collaborateurs qui commencent le télétravail.

On a donc nécessairement :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 0,85\, a_n + 450$$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$v_{n+1} = a_{n+1} - 3000$$
$$= 0,85\, a_n + 450 - 3000$$
$$= 0,85\, a_n - 2250$$
$$= 0,85\,(a_n - 3000)$$
$$v_{n+1} = 0,85\, v_n$$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = a_0 - 3000 = -2800$

b) D'après la question précédente, on peut dire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -2800 \times 0,85^n$$

c) On a pour tout entiers naturels n :
$v_n = a_n - 3000$ donc :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 3000 - 2800 \times 0,85^n$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$a_n > 2500 \iff 3000 - 2800 \times 0{,}85^n > 2500$

$\iff 500 > 2800 \times 0{,}85^n$

$\iff \frac{5}{28} > 0{,}85^n$

$\iff \ln(5/28) > n \ln(0{,}85)$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\iff n > \ln(5/28)/\ln(0{,}85)$ (car $\ln(0{,}85) < 0$).

Or $\ln(5/28)/\ln(0{,}85) \approx 10{,}6$.

Donc le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieurs à 2500 au bout de 11 mois.

On peut également répondre à cette question par programmation : (en effet on ne précise pas la méthode !)

```
def teletravail(p):
    a = 200
    mois = 0
    while a <= p:
        a = 0,85 * a + 250
        mois = mois + 1
    return mois
```

On doit ensuite chercher teletravail(2500)

Partie B

1) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\quad f'(x) = \frac{5(x+2) - 1(5x+4)}{(x+2)^2}$$

Rappels : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

ie $\forall x \in [0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{6}{(x+2)^2}$

Ainsi $\forall x \in [0;+\infty[,\ f'(x) > 0$

Donc f est croissante strictement sur $[0;+\infty[$

2) a) Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: "$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$".
Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

On a $u_1 = \frac{5u_0 + 4}{u_0 + 2} = \frac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$

donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$

donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Remarque : il est précisé ici récurrence simple (pas parce qu'elle est facile) car il existe des récurrences doubles et des récurrences fortes qui dépendent du nombre d'hypothèses de récurrence

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie, montrons que P_{n+1} est vraie. | M3

Par hypothèse de récurrence, on a :

$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

Ainsi par stric. croissance de la fonction f sur $[0;+\infty[$, on a :

$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$

ie $0 \leqslant 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \underbrace{\frac{24}{8}}_{3} \leqslant 4$

ie $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_n est vraie pour tout entier naturel n par principe de récurrence simple, ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

b) (u_n) est croissante et majorée (q° 2a) donc d'après le théorème de la limite monotone (u_n) converge vers un réel ℓ

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \iff 4 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 4$

Remarque
Penser à citer vos théorème !

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1;1[$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 4 = 4$.

Ainsi d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 4$$

Donc au bout d'un grand nombre de mois, le nombre de collaborateur satisfaits par cette nouvelle mesure va tendre vers 4000.

Exercice A

1) On a :
- $\vec{AB}\ (1;0;2)$
- $\vec{AC}\ (-2;5;1)$
- $\vec{BC}\ (-3;5;-1)$

On en déduit que : $AB^2 = \|\vec{AB}\|^2 = 1^2 + 0^2 + 2^2 = 5$

$AC^2 = \|\vec{AC}\|^2 = (-2)^2 + 5^2 + 1^2 = 30$

$BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = (-3)^2 + 5^2 + (-1)^2 = 35$.

On a $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Ainsi d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

2) a) Deux vecteurs directeurs du plan ABC sont les vecteurs :

$\overrightarrow{AB}\,(1\,;0\,;2)$

$\overrightarrow{AC}\,(-2\,;5\,;1)$

On a : - $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 1\times 2 + 0\times 1 + 2\times(-1) = 0$

- $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = -2\times 2 + 5\times 1 + 1\times(-1) = 0$

Ainsi $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) donc il existe un réel d tel qu'une équation cartésienne de (ABC) est :

$$2x + y - z + d = 0.$$

Or $A(2\,;-1\,;0) \in (ABC)$, donc

$$2\times 2 + (-1) - 0 + d = 0 \Leftrightarrow 4 - 1 - 0 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow d = -3$$

Ainsi une équation cartésienne de (ABC) est :

$$2x + y - z - 3 = 0$$

c) On a $S(0\,;1\,;4)$.

ie $2\times 0 + 1 - 4 - 3 = -6 \neq 0$

Donc $S \notin (ABC)$

Ainsi les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3) a) (d) est orthogonale au plan (ABC) donc un vecteurs directeurs de (d) est le vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ (normal au plan (ABC)).

De plus $S \in (d)$.

Ainsi, une représentation paramétrique de (d) est :

$$\boxed{(d) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$$

b) H est le point d'intersection entre (d) et (ABC) donc les coordonnées de H sont solution du système

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = 4-t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R} \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

$(x\,;y\,;z)$

On a donc :

$2 \times 2t + 1 + t - (4-t) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 4t + 1 + t - 4 + t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 6t - 6 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$

Ainsi les coordonnées $(x;y;z)$ de H sont :

$$\begin{cases} x = 2 \times 1 = 2 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

D'où $H(2;2;3)$

4) La base du tétraèdre ABCS est le triangle ABC :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{30} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{150}}{2}$$

La hauteur du tétraèdre ABCS est le segment [HS] et on a :

$$HS = \|\overrightarrow{HS}\| = \sqrt{(0-2)^2 + (1-2)^2 + (4-3)^2}$$

ie $HS = \sqrt{6}$

D'où le volume du tétraèdre ABCS :

$$V = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \times HS}{3}$$

ie $V = \frac{\sqrt{150} \times \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{900}}{6} = \frac{30}{6}$

$$\boxed{V = 5}$$

5) a) $\overrightarrow{SA}(2;-2;-4)$

Donc $SA = \|\overrightarrow{SA}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2}$

$SA = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

b) On a :

$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB})$ (c'est la définition du produit scalaire)

Donc $\cos(\widehat{ASB}) = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}}{SA \times SB} \Rightarrow \widehat{ASB} = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}}{SA \times SB}\right)$

Or on a $\overrightarrow{SA}(2;-2;-4)$ et $\overrightarrow{SB}(3;-2;-2)$

donc $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 2 \times 3 - 2 \times (-2) - 4 \times (-2) = 18$

Ainsi $\widehat{ASB} = \arccos\left(\frac{18}{\sqrt{24} \times \sqrt{17}}\right)$

ie $\widehat{ASB} = 27{,}0°$

Exercice B

MS

Partie A

1) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc pour tout x réels, on a :

$$g'(x) = 2x\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-1/3\,x} + \frac{2}{3}$$

ie $g'(x) = \frac{-2}{3}e^{-1/3\,x} + \frac{2}{3}$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{2}{3}\left(1 - e^{-1/3\,x}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, On a :

$$g'(x) \geqslant 0 \iff \frac{2}{3}\left(1 - e^{-1/3\,x}\right) \geqslant 0$$

$\iff 1 - e^{-1/3\,x} \geqslant 0 \quad (2/3 > 0)$

$\iff 0 < e^{-1/3\,x} \leqslant 1$

$\iff -\frac{1}{3}x \leqslant 0$ (par strict croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\iff x \geqslant 0 \quad (-1/3 < 0)$

Ainsi : - g est croissante strictement sur $[0\,;+\infty[$

- g est décroissante strictement sur $]-\infty\,;0]$

3) D'après la question précédente, on en déduit que g admet un mimimum sur $\mathbb{R}$ qui est $g(0) = 0$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0$

g est donc positive sur $\mathbb{R}$

Partie B

1) On a $3y' + y = 0 \iff y' = -\frac{1}{3}y \quad (E)$

L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \{y : x \mapsto ke^{-1/3\,x} \mid k \in \mathbb{R}\}$$

2) La solution particulière y_p dont la courbe représentative passe par le point $M(0;2)$ vérifie $y_p(0) = 2$.

Donc on a d'après la question précédente, avec $k \in \mathbb{R}$:

$y_p(0) = 2 \iff ke^{0} = 2$

$\iff k = 2$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ y_p(x) = 2e^{-1/3\,x}$

3) a) f est solution de (E) on a donc :

$$f'(0) = -\frac{1}{3} f(0)$$

$$f'(0) = -\frac{2}{3}$$

Or la tangente (Δ_0) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M(0;2)$ a pour équation :

$$(\Delta_0) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

donc $(\Delta_0) : y = -\frac{2}{3}x + 2$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) - y = 2e^{-1/3x} + \frac{2}{3}x - 2$$

ie $\boxed{f(x) - y = g(x)}$

Or d'après A3 ; on a $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$

Donc sur $\mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente (Δ_0) et elles se croisent en $x = 0$

Partie C

1) Soit $a \in \mathbb{R}$.

L'équation de la tangente (Δ_a) est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Or $f'(a) = -\frac{1}{3} f(a)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \; y = -\frac{1}{3} f(a)(x-a) + f(a)$

ie $\forall x \in \mathbb{R}, \; y = f(a)\left(-1/3\,(x-a) + 1\right)$

Ainsi :

$$y = 0 \iff f(a)\left(-1/3\,(x-a) + 1\right) = 0$$

$$\iff f(a) = 0 \text{ ou } -\frac{1}{3}(x-a) + 1 = 0$$

$$\iff -\frac{1}{3}(x-a) + 1 = 0$$

(car $\forall a \in \mathbb{R}, f(a) > 0$ par stricte positivité de la fonction exponentielle)

$$\iff x - a = 3$$

$$\iff x = a + 3$$

Ainsi (Δ_a) coupe l'axe des abscisses en $x = a+3$

2) (Δ_{-2}) passe par le point d'abscisse $(-2\,;\,f(-2))$ (sur la courbe $\mathcal{C}_f$) LMS

et elle coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $(1\,;\,0)$ d'après la question précédente.

Il suffit donc de relier ces deux points pour tracer (Δ_{-2})