Spécialité Mathématiques - Centres étrangers Afriques 2 - 2021

Exercice 1 (les justifications sont données pour que vous compreniez vos erreurs)

1) Réponse a

Justification :

g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on a pour tout x réels :

$$g'(x) = 2x + 2 + \frac{3}{x^2}$$

La tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 a pour équation

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

ie $y = 7(x-1)$

2) Réponse b

Justification : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{n(1+2/n)}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{1+2/n}$

$= 3$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$

Remarque : on avait ici une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$!

→ on doit donc factorisé par le terme de plus haut degré, ici n.

3) Réponse c

Justification

On réalise 10 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante (tirage aléatoire avec remise) dont le succès "obtenir une boule noire" a pour probabilité 3/5.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Ainsi X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 3/5$.

On a donc :

$$P(X=4) = \binom{10}{4} \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^6$$

ie $P(X=4) = 0{,}1115$

4) Réponse b

Justification : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(3 - \frac{x}{e^x}\right)$

$= +\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, par croissance comparée

Remarque : forme indéterminée du type $+\infty - \infty$.

5) Réponse b

Justification : Il y a 36^8 combinaisons possibles.

Or $\frac{36^8}{100\times 10^6} = 28\,211$.

Donc le logiciel peut craquer le code en 28211 secondes soit 7,8 heures.

Exercice 2

Partie A

1)a) ∘ A l'année $n+1$, il reste 98 % des panneaux solaires de l'année précedente puisque 2 % se sont détériorés.
De plus 250 nouveaux sont installés.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}98\, u_n + 250$
où u_n modélise le nombre de panneaux solaire à l'année n.

∘ Par ailleurs la première année (en 2020), on a 10560 panneaux solaires en place, ie $u_0 = 10560$

b) A la calculatrice, on trouve $u_n > 12000$ pour $n = 68$

c)
```
u = 10560
n = 0
while u <= 12000 :
    u = 0.98 * u + 250
    n = n+1
print (n).
```

2) Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: " $u_n \leqslant 12500$ ".
Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie
On a $u_0 = 10560 \leqslant 12500$
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a :
$u_n \leqslant 12500 \Leftrightarrow 0{,}98\, u_n \leqslant 12250 \quad (0{,}98 > 0)$
$\Leftrightarrow 0{,}98\, u_n + 250 \leqslant 12500$
$\Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant 12500$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel par principe de récurrence simple.
Ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant 12500$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$u_{n+1} - u_n = 0{,}98\, u_n + 250 - u_n$
$= 250 - 0{,}02\, u_n$.

Or $u_n \leqslant 12500 \Leftrightarrow -0{,}02\, u_n \geqslant -250 \quad (-0{,}02 < 0)$
$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

La suite (u_n) est donc croissante

4) (u_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel l.

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12500$$
$$= 0,98\, u_n - 1250$$
$$= 0,98\,(u_n - 1250/0,98)$$
$$= 0,98\,(u_n - 12500)$$
$$v_{n+1} = 0,98\, v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 et de premier terme $v_0 = u_0 - 12500 = -1940$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -1940 \times 0,98^n$

c) On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 12500 - 1940 \times 0,98^n$$

d) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,98^n = 0$ car $0,98 \in]-1;1[$.

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 12500}$$

Dans le contexte du modèle, cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'année, la station Big Solar possèdera 12500 panneaux solaires.

Partie B

1) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on a pour tout x réels positifs :

$$f'(x) = 10\, e^{-0,02x+1,4}$$

Or on a pour tout x réels positifs $f'(x) > 0$ par stricte positivité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Ainsi f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

2) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0,02x+1,4} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ (en posant $X = -0,02x+1,4$)

car $\lim\limits_{x \to +\infty} -0,02x+1,4 = -\infty$.

d'où

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 12500}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$f(x) > 12500 \iff 12500 - 500\, e^{-0,02x+1,4} > 12000$$
$$\iff 500 > 500\, e^{-0,02x+1,4} \quad (500 > 0)$$
$$\iff 0 < e^{-0,02x+1,4} < 1$$
$$\iff -0,02x + 1,4 < 0 \quad \text{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*\text{)}$$
$$\iff x > \frac{1,4}{0,02} \quad (\text{car } -0,02 < 0)$$

Le nombre de panneaux solaires dépassera les 12000 au bout de 70 ans dans ce modèle.

Exercice 3

Partie A

1) Dans le repère $(A ; \vec{AB} ; \vec{AD} ; \vec{AE})$, on a :

$F(1;0;1)$ car $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AE}$

$I(0;1/2;1/2)$ car I est le centre de la face ADHE.

$J(1;1;2/3)$ car $\vec{AJ} = \vec{AB} + \vec{AD} + a\vec{CG}$
$= \vec{AB} + \vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AE}$ (car $\vec{AE} = \vec{CG}$)

2) (d) est parallèle à (FJ) donc un vecteur directeur de (d) est le vecteur $\vec{FJ}(0;1;-1/3)$.

De plus, (d) passe par $I(0;1/2;1/2)$

Ainsi une représentation paramétrique de (d) est :

$$(d) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 + t \\ z = 1/2 - 1/3\, t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

3) a) Le point de coordonnées $(0;0;2/3)$ appartient à la droite (AE).
De plus en prenant $t = -1/2$ dans l'équation paramétrique du (d), on a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1/2 + 1/6 = 2/3 \end{cases}$$

Donc le point de coordonnées $(0;0;2/3)$ appartient également à (d).

Ainsi le point de coordonnées $(0;0;2/3)$ est le point d'intersection des droites (AE) et (d) ; il s'agit donc du point K.

D'où $K(0;0;2/3)$

b) L appartient à la droite (DH), donc les coordonnées de L sont de la forme $(0;1;z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.
Or $L \in (d)$, donc en prenant $t = 1/2$ dans l'équation paramétrique de (d) on a :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 + 1/2 = 1 \\ z = 1/2 - (1/3)\times(1/2) = 1/3 \end{cases}$$

Ainsi $L(0;1;1/3)$

4) a) On a $\vec{FJ}(0;1;-1/3)$ et $\vec{KL}(0;1;-1/3)$
On remarque que $\vec{FJ} = \vec{KL}$.
On en déduit donc que FJLK est un parallélogramme

b) On a $FJ = \|\vec{FJ}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1/3)^2} = \sqrt{2}/3$
On a : $\vec{JL}(-1;0;-1/3)$ et $JL = \|\vec{JL}\| = \sqrt{2}/3$
Ainsi FJLK est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur, donc FJLK est un losange.

c) On a :
$\vec{FJ}.\vec{JL} = 0\times(-1)+1\times0+(-1/3)\times(-1/3)$
$= 1/9 \neq 0$
Donc $\vec{FJ}$ et $\vec{JL}$ ne sont pas orthogonaux. FJLK n'est donc pas un carré

Partie B

1) En fonction de a, on a $J(1;1;a)$ car $\vec{CJ} = a\vec{CG}$

2) $\vec{FJ}(0;1;a-1)$ et $\vec{KL}(0;1;a-1)$
On a donc $\vec{FJ}=\vec{KL}$ donc FJLK est un parallélogramme.

3) On a $\vec{JL}(-1;0;-a/2)$
$JL=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-a/2)^2}$
$=\sqrt{4+a^2}/2$

et $FJ=\sqrt{0^2+1^2+(a-1)^2}$
$=\sqrt{1+(a-1)^2}$

FJLK est un losange $\Leftrightarrow$ 2 côtés consécutifs sont de même longueur (car c'est un parallélogramme)
$\Leftrightarrow FJ = JL$
$\Leftrightarrow FJ^2 = JL^2$ (par stricte croissance de la fonction $x\mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$)
$\Leftrightarrow \frac{4+a^2}{4} = 1+(a-1)^2$
$\Leftrightarrow \cancel{1}+a^2/4 = \cancel{1}+a^2-2a+1$
$\Leftrightarrow \frac{3a^2}{4}-2a+1=0$
$\Leftrightarrow a = 2/3$ ou $a=2$ (car $\Delta = 1 > 0$)
$\Leftrightarrow a = 2/3$ (car $a\in[0;1]$)

Ainsi FJLK est un losange si $a=2/3$

4) FJKL est un carré $\Leftrightarrow$ FJKL est un losange ayant un angle droit
$\Leftrightarrow \vec{FJ}.\vec{JL}=0$
$\Leftrightarrow 0\times(-1)+1\times0+(a-1)(-a/2)=0$
$\Leftrightarrow a/2=0$ ou $a-1=0$
$\Leftrightarrow a=0$ ou $a=1$

FJKL est un carré si $a=0$ ou $a=1$

Exercice A

Partie A

1). Si le test est négatif, une seule analyse aura été effectuée (l'analyse du mélange) donc dans ce cas X_m prend la valeur 1.
- Si le test positif, on réalise une analyse du sang des m personnes en plus de l'analyse du mélange au début. Dans ce cas X_m prend la valeur $m+1$.

Ainsi X_m prend les valeurs 1 et $m+1$

2) Si X_m prend la valeur 1, cela signifie qu'aucune des m personnes n'est malade.
Or la probabilité que l'individu ne soit pas malade est de 0,95.
Ainsi $P(X_m=1)=0{,}95^m$
Donc :
$P(X_m=m+1) = 1-P(\overline{X_m=m+1})$
$= 1-P(X_m=1)$
$P(X_m=m+1) = 1-0{,}95^m$

La loi de X_n est donc :

x_i	1	$n+1$
$P(X_n=x_i)$	$0{,}95^n$	$1-0{,}95^n$

3) L'espérance de X_n représente le nombre moyen d'analyse réalisées lors du test de n individus.

$$E(X_n) = 1 \times P(X_n = 1) + (n+1)P(X_n = n+1)$$
$$= 0{,}95^n + (n+1)(1-0{,}95^n)$$

$$E(X_n) = n+1 - n\times 0{,}95^n$$

Partie B

1) f est dérivable sur $[20;+\infty[$ car la fonction $x\mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a pour tout x appartenant à l'intervalle $[20;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \ln(0{,}95)$$

On a :

$x \geqslant 20 \iff 0 < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{20}$ (par stricte décroissance de la fonction $x\mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\iff f'(x) \leqslant \frac{1}{20} + \ln(0{,}95) \underline{\underline{< 0}}$

Ainsi :

$\forall x \in [20;+\infty[,\ f'(x) < 0.$

f est donc strictement décroissante sur $[20;+\infty[$

2) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) + x\ln(0{,}95)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x} + \ln(0{,}95)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$ (car $\ln(0{,}95) < 0$)

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, par croissance comparée.

3) • f est continue sur $[20;+\infty[$ comme somme de fonction qui le sont (la fonction $x\mapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$).

• f est strictement décroissante sur $[20;+\infty[$

• $f([20;+\infty[) =]-\infty; f(20)]$.

Or :

$f(20) = \ln(20) - 20\ln(0{,}95) \simeq 1{,}97 > 0.$

Donc $0 \in]-\infty; f(20)]$

Ainsi d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[20;+\infty[$.

A la calculatrice, on obtient $87 < \alpha < 87{,}1$

4) f est strictement décroissante sur $[20;+\infty[$ et s'annule en α donc :

- f est positive sur $[20;\alpha[$
- f est nulle en α
- f est négative sur $]\alpha;+\infty[$

Partie C

1) D'après la partie A : $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_n) = 1 + n - 0,95^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$E(X_n) < n \iff n + 1 - n \times 0,95^n < n$
$\iff n \times 0,95^n > 1$
$\iff \ln(n) + n\ln(0,95) > 0$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$)
$\iff f(n) > 0$
$\iff n \in [\![20 ; 87]\!]$ (car $87 < \alpha < 87,1$)

Ainsi la première méthode permet de diminuer le nombre d'analyse pour des échantillons de 87 personnes maximum.

Exercice B

Partie A

1) Par lecture graphique, on a :
- $f(0) = 3$
- $f'(0) = -2$ (coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0)

2) On a :
$f(0) = e^0 + be^0 = 3 \iff 1 + b = 3$
$\iff b = 2$

3) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a donc pour tout x réels :
$f'(x) = e^x - 2e^{-x} + a$

b) On a : $f'(0) = e^0 - 2e^0 + a$
$f'(0) = a - 1$

c) On a :
$f'(0) = -2 \iff a - 1 = -2$
$\iff a = -1$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x + 2e^{-x}$

4) a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après 3a, on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - 2e^{-x} - 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$g'(x) + g(x) = e^x - \cancel{2e^{-x}} - 1 + e^x - x + \cancel{2e^{-x}}$
ie $g'(x) + g(x) = 2e^x - x - 1$

Ainsi g est solution de l'équation différentielle (E)

b) On a $y' + y = 0 \iff y' = -y$ (H)

Pour tout x réel, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (H) est :

$\{ y : x \mapsto ke^{-x} \mid k \in \mathbb{R} \}$

c) g est une solution particulière de (E) et on dispose de l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H)
Aimsi l'ensemble des solutions de (E) est, pour tout x réels :

$$\left\{ y : x \mapsto e^{x} - x + (k+2)e^{-x} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

Partie B

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$(e^{x}-2)(e^{x}+1) = e^{2x} - 2e^{x} + e^{x} - 2$
$(e^{x}-2)(e^{x}+1) = e^{2x} - e^{x} - 2$

Remarque : on peut procéder autrement.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$e^{2x} - e^{x} - 2 = 0 \iff (e^{x})^2 - e^{x} - 2 = 0$
$\iff X^2 - X - 2 = 0$, en posant $X = e^{x}$
$\iff X = -1$ ou $X = 2$, car $\Delta = 9 > 0$

Aimsi $e^{2x} - e^{x} - 2 = (e^{x}+1)(e^{x}-2)$

→ on a trouver les deux racines
→ on rappelle que la forme factorisée d'un polynôme à 2 racines x_1 et x_2 est $(X-x_1)(X-x_2)$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$g'(x) = e^{x} - 2e^{-x} - 1$
$= e^{-x}(e^{2x} - 2 - e^{x})$
$g'(x) = e^{-x}(e^{x}-2)(e^{x}+1)$

3) En admettant que pour tout $x \in [1;+\infty[$, $e^{x} - 2 > 0$, on en déduit que :
$\forall x \in [1;+\infty[$, $g'(x) > 0$ par stricte positivité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $[1;+\infty[$.

Aimsi g est croissante sur $[1;+\infty[$