Exercice 1 (Justifications données à but pédagogique mais non exigées)

1) Réponse b

Justification : Si $t = 5$, on a :

$$\begin{cases} x = -4 + 3\times 5 = 11 \\ y = 6 - 3\times 5 = -9 \\ z = 8 - 6\times 5 = -22 \end{cases}$$

Ainsi le point $M_2(11, -9, -22)$ appartient à $\mathcal{D}'$

2) Réponse c

Justification : D'après la représentation paramétrique de $\mathcal{D}'$, le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Ainsi $\vec{u_3}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$

3) Réponse d

Justification : Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\vec{AB} = -\frac{2}{3}\vec{u_3}$.

Ainsi $\vec{AB}$ et $\vec{u_3}$ sont colinéaires, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc parallèles.
De plus, si $t = 5/3$, on a d'après la représentation paramétrique de $\mathcal{D}'$:

$$\begin{cases} x = -4 + 3\times 5/3 = 1 \\ y = 6 - 3\times 5/3 = 1 \\ z = 8 - 6\times 5/3 = -2 \end{cases}$$

donc le point A appartient aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc confondues.

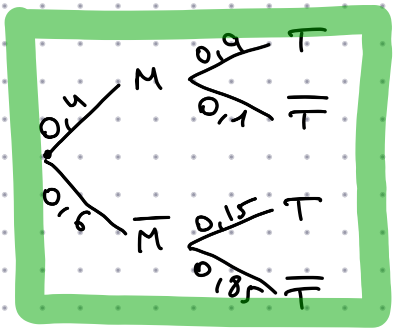
4) Réponse c

Justification : Soit $m \in \mathbb{R}$
Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P} \iff \vec{n}\cdot\vec{AB} = 0$
$\iff 1\times(-2) + m\times 2 + (-2)\times 4 = 0$
$\iff 2m - 10 = 0$
$\iff m = 5$

Exercice 2

1) a)



b) On cherche à calculer $P(M\cap T)$.

$P(M\cap T) = P(M)\times P_M(T)$
$= 0,4\times 0,9$
$P(M\cap T) = 0,36$

c) $\{M ; \bar{M}\}$ est un système complet d'évènement de probabilité non nulle, ainsi d'après la formule des probabilités totales, on a :

MS

$$P(T) = P(M\cap T) + P(\bar{M}\cap T)$$
$$= P(M\cap T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T)$$
$$= 0,36 + 0,6 \times 0,15$$
$$P(T) = 0,45$$

d) On cherche à calculer la probabilité $P_T(M)$.
Comme $P(T) \neq 0$, on a :
$$P_T(M) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)}$$
ie $P_T(M) = \frac{0,36}{0,45}$

ie $P_T(M) = 0,8$

2) a) On répète 20 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique (les chats sont choisis au hasard) et indépendante (tirage avec remise), dont le succès "le test est positif" a pour probabilité 0,45 (q°1c).
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{B}(20 ; 0,45)$

b) $P(X=5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times 0,55^{15}$

ie $P(X=5) = 0,036$

La probabilité d'avoir exactement cinq chats positifs au test est de 0,036.

c) A la calculatrice, on obtient :
$P(X \leq 8) = 0,44$
La probabilité d'avoir au maximum 8 chats positifs est de 0,44.

d) $E(X) = 20 \times 0,45$
ie $E(X) = 9$

On aura en moyenne 9 chats présentant un test positif dans l'échantillon.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On répète n fois une épreuve de Bernoulli de manière identique (les chats sont choisis au hasard) et indépendante (tirage avec remise), dont le succès "le test est positif" a pour probabilité 0,45 (q°1c).
Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
Alors $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n ; 0,45)$
On a :
$$p_n = P(Y \geq 1)$$
$$= 1 - P(Y < 1)$$
$$= 1 - P(Y = 0)$$
$$= 1 - \binom{n}{0} \times 0,45^0 \times 0,55^n$$
$$p_n = 1 - 0,55^n$$

b) Le rôle du programme Python est de déterminer le rang minimal n à partir duquel $p_n \geq 0,99$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$p_n \geq 0,99 \iff 1 - 0,55^n \geq 0,99$
$\iff 0,55^n \leq 0,01$
$\iff n\ln(0,55) \leq \ln(0,01)$, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.
$\iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,55)}$

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,55)} \simeq 7,7$

Le programme renverra donc la valeur 8.

Exercice 3

1) A partir des valeurs du tableau, on conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{4}{u_n} = n+4$$

2) Pour tout entier naturel n, on définit la proposition P_n : " $u_n > 0$ ".
Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple que P_n est vraie.
Initialisation : Montrons que P_0 est vraie.
On a $u_0 = 1 > 0$
Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence on a :
- $u_n > 0$ ie $4u_n > 0$
- $u_n + 4 > 4 > 0$

Donc $\dfrac{4u_n}{u_n+4} > 0$ ie $u_{n+1} > 0$.
Donc P_{n+1} est vraie

Conclusion : P_n est vraie pour tout entier naturel n par principe de récurrence simple, et on a :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n+4} - u_n$$

$$= \frac{4u_n - u_n(u_n+4)}{u_n+4}$$

$$= -\frac{u_n^2}{u_n+4} < 0 \quad , \text{car} \quad u_n > 0$$

La suite (u_n) est décroissante.

4) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = \frac{4}{u_{n+1}}$$

$$= \cancel{4} \times \frac{u_n+4}{\cancel{4}u_n}$$

$$= 1 + \frac{4}{u_n}$$

ie $v_{n+1} = 1 + v_n$

(v_n) est donc une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = 4/u_0 = 4$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = 4+n$

6) D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{4}{4+n}$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

Exercice A

Partie 1

1) * $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} h(x) = -\infty}$

car $\lim\limits_{x \to 0} 1 + \dfrac{\ln(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} 1 + \ln(x) \times \dfrac{1}{x^2}$

et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

* $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1}$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée.

2) h est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonction qui le sont, et on a :

$\forall x \in]0;+\infty[,\ h'(x) = \dfrac{1/x \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4}$

i.e. $\forall x \in]0;+\infty[,\ h'(x) = \dfrac{x - 2x\ln(x)}{x^4}$

i.e. $\boxed{\forall x \in]0;+\infty[,\ h'(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}}$

3) On a pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x^3 > 0$.
Le signe de h' dépend donc du signe du numérateur.
Soit $x \in]0;+\infty[$.
$1 - 2\ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 1/2$
$\iff x \leq \sqrt{e}$, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

On a donc :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$h'(x)$	||	$+$	0	$-$	
h	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{e+1}{2e}$	$\searrow$	1

4) • h est continue sur $]0;+\infty[$.
• h est strictement croissante sur $]0;\sqrt{e}]$ et strictement décroissante sur $]\sqrt{e};+\infty[$
• On a : $h(]0;\sqrt{e}]) =]-\infty; \frac{e+1}{2e}]$ et $0 \in]-\infty; \frac{e+1}{2e}]$ (car $\frac{e+1}{2e} > 0$)

et $h(]\sqrt{e};+\infty[) =]1; \frac{e+1}{2e}]$ et $0 \notin]1; \frac{e+1}{2e}[$

Ainsi d'après le théorème de la bijection l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$

Par ailleurs, à la calculatrice, on a : $h(0{,}5) < 0$ et $h(1) > 0$.
Ainsi : $\boxed{0{,}5 < \alpha < 1}$

Partie II

1) Soit $x \in]0;+\infty[$.

$$f_1(x) - f_2(x) = \cancel{x} - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} - \left(\cancel{x} - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$f_1(x) - f_2(x) = h(x)$

2) D'après I.5, on a :

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	|	$-$	0	$+$	

(en effet, le minimum de h sur $]\alpha;+\infty[$ est $1>0$)

Ainsi sur $]0;\alpha[$, la courbe $\mathcal{C}_1$ est en-dessous de $\mathcal{C}_2$.
sur $]\alpha;+\infty;$ la courbe $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_2$

Par ailleurs, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$, il y a donc un unique point d'intersection entre les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de coordonnées $(\alpha; f_1(\alpha))$, ie $(\alpha;\alpha)$

car $f_1(\alpha) = \alpha - 1 - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}$

$$= \alpha - \left(1 + \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}\right)$$

$$= \alpha - h(\alpha)$$

$$= \alpha$$

Exercice B

Partie I

1) f' semble positive sur $]-\infty;-1]$ et négative sur $]-1;+\infty[$.
On conjecture donc que f est croissante sur $]-\infty;1]$ et décroissante sur $]-1;+\infty[$.

2) • f' semble décroissante sur $]-\infty;0]$ ($f''(x) \leq 0$) donc f serait concave sur $]-\infty;0]$.
• f' semble croissante sur $]0;+\infty[$ ($f''(x) \geq 0$) donc f serait convexe sur $]0;+\infty[$.

Partie II

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{x}{e^x} + 2e^{-x} = xe^{-x} + 2e^{-x}$$

$$= e^{-x}(x+2)$$

$$\frac{x}{e^x} + 2e^{-x} = f(x)$$

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée

et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} 2e^{X} = 0$

f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinnage de $+\infty$.

2) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction qui le sont et on a pour tout x réels :

$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (-e^{-x})(x+2)$

$f'(x) = e^{-x}(-x-1)$

b) Par positivité de la fonction exponentielle, on a pour tout x réels $e^{-x} > 0$.
Par ailleurs on a pour tout x réels,
$-x-1 \geq 0 \iff x \leq -1$
Ainsi on a :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

et $f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = e$

c) • f est continue sur $[-2;-1]$ comme produit de fonction qui le sont
• f est strictement croissante sur $[-2;-1]$.
• $f([-2;-1]) = [0;e]$ (et $e \approx 2,71$)
Or $2 \in [0;e]$
Ainsi d'après le théorème de la bijection l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α sur $[-2;-1]$

D'après la calculatrice, on obtient $-1,6 < \alpha < -1,5$ (afficher le tableau de valeur de la fonction avec un pas de 10^{-1})

3) f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction qui le sont et on a pour tout x réels :

$f''(x) = -1 \times e^{-x} + (-e^{-x})(-x-1)$

$f''(x) = xe^{-x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

par positivité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$

Ainsi f est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

Au point A d'abscisse 0, la courbe $\mathcal{C}$ change de convexité donc A correspond au point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.