Enseignement de spécialité Physique-chimie et mathématiques

Corrigé du baccalauréat - Sujet Zéro 1

Merci d'adresser vos remarques à anthony.le.bihan@icloud.com

Exercice 1

Partie 1 : Étude thermique du four

Le document présente plusieurs choses :
— la disposition des différentes couches ;
— les caractéristiques des différentes couches ;
— les températures à l'intérieur et à l'extérieur du four.

1. **Méthode 1 :** La formule de la résistance thermique pour un matériau est rappelée :

$$R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda \times S} \tag{1}$$

avec e et S l'épaisseur et la surface du matériau et λ la conductivité thermique du matériau homogène.
L'analyse dimensionnelle va nous permettre de déterminer la dimension et donc l'unité de R_{th}. Le tableau du Document 1 nous fournit déjà les unités des différentes grandeurs :
— e est une épaisseur donc une longueur, $[e] = m$ (dans le tableau, e est donné en mm mais l'unité du système international USI préconise le m comme unité de référence pour les longueurs). De toute façon, m et mm sont la même chose à un facteur $10^3 = 100$ près : $1\ m = 10^3\ m = 1000\ m$ et inversement $1\ mm = 10^{-3}\ m = \frac{1}{1000}\ m$;
— S est une surface donc une longueur $\times$ longueur, $[S] = m^2$;
— λ est une conductivité thermique et son unité est donnée dans le tableau du Document 1, $[\lambda] = W \cdot m^{-1} \cdot C^{-1}$.
Au total,

$$[R_{\text{th}}] = \frac{[e]}{[\lambda] \times [S]} = \frac{m}{W \cdot m^{-1} \cdot C^{-1} \times m^2} = \frac{m}{W \cdot C^{-1} \cdot m} = C \cdot W^{-1} \tag{2}$$

Donc $\boxed{R_{\text{th}} \text{ s'exprime en } C \cdot W^{-1}}$.

Méthode 2 : La définition de la résistance thermique relie le flux thermique à la variation de température :

$$R_{\text{th}} = \frac{\Delta T}{\varphi} \tag{3}$$

L'énoncé nous fournit aussi les unités :
— le flux thermique φ est une puissance, $[\varphi] = W$;
— ΔT est un écart de température, $[\Delta T] = C$.
Ainsi,

$$[R_{\text{th}}] = \frac{[\Delta T]}{[\varphi]} = \frac{C}{W} = C \cdot W^{-1} \tag{4}$$

Donc $\boxed{R_{\text{th}} \text{ s'exprime en } C \cdot W^{-1}}$.

2. Il s'agit d'effectuer les applications numériques pour chaque matériau. **Attention**, e est donné en mm, S en m^2 et λ en $W \cdot m^{-1} \cdot C^{-1}$ donc le plus simple ici est de convertir e en m **avant** d'effectuer l'application numérique.
   — Matériau ① : $R_1 = \dfrac{75 \times 10^{-3}}{1,25 \times 0,371} \implies \boxed{R_1 = 0,162\ C \cdot W^{-1}}$
   — Matériau ② : $R_2 = \dfrac{20 \times 10^{-3}}{0,20 \times 0,654} \implies \boxed{R_2 = 0,154\ C \cdot W^{-1}}$
   — Matériau ③ : $R_3 = \dfrac{10 \times 10^{-3}}{0,13 \times 0,710} \implies \boxed{R_3 = 0,108\ C \cdot W^{-1}}$
   Il est rassurant de constater que les ordres de grandeur de résistance thermique sont les mêmes pour les 3 matériaux.

3. Ici, les couches de matériau sont collées les unes aux autres, elles sont donc **en série**. Pour obtenir la résistance thermique équivalente, on doit donc **sommer** les résistances thermiques de chaque matériau :

$$\boxed{R_{\text{th}} = R_1 + R_2 + R_3} \tag{5}$$

   Application numérique : $\boxed{R_{\text{th}} = 0,424\ C \cdot W^{-1}}$.

4. On peut calculer le flux thermique avec la formule $\varphi = \dfrac{\Delta T}{R_{\text{th}}}$. Dans le cas présent, la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur du four est $\boxed{\Delta T = 850 - 20 = 830°C}$. Pour R_{th}, on utilise le résultat de la question précédente.

   Application numérique : $\boxed{\varphi = 1958\ W}$.

5. Lorsque le four produit 6000 W, il en perd 1958 W *via* les pertes (fuites) thermiques. C'est quasiment **un tiers** ! Cela représente un rendement de 66% : il faudrait songer à **mieux isoler le four** pour limiter les pertes.

Partie 2 : Étude d'un panneau solaire

Le document présente plusieurs choses :
— un panneau photo-voltaïque présente $8 \times 12 = 96$ cellules ;
— la dimension d'une cellule est de $0,13\ m \times 0,13\ m$;
— un graphe courant-tension tracée pour différentes valeurs d'irradiance. On parle de courbes à iso-irrandiance.

1. La surface d'une cellule est donc $\boxed{S_{\text{cellule}} = 0,0169\ m^2}$. Un panneau comporte 96 cellules. Donc $S = 96 \times S_{\text{cellule}} = 96 \times 0,0169$.

   Ainsi : $\boxed{S = 1,6224\ m^2}$.

2. Question pas évidente car dans le cours, il n'y a *a priori* pas de formule reliant l'irradiance et la puissance. On doit raisonner par **homogénéité** ou par **intuition** :
   — l'irrandiance I est un flux ou une puissance surfacique. Il faut donc la multiplier par une surface S pour obtenir une puissance P_L.
   — L'unité de l'irradiance I est $W \cdot m^{-2}$. On veut calculer une puissance P_L, en W. A la question précédente, on a calculé une surface S en m^2.
   Physiquement, l'irradiance de 1 000 $W \cdot m^{-2}$ signifie qu'une surface de 1 m^2 reçoit une puissance de 1 000 W. De toutes ces explications, il en ressort :

$$\boxed{P_L = I \times S} \tag{6}$$

Application numérique : $\boxed{P_L = 1622\ W}$.

3. C'est une question assez dure. Elle n'a aucun lien avec les autres et « sort un peu de nulle part ». Il faut utiliser les informations données dans le document et en particulier le graphe courant-tension. Il y a **5 courbes différentes** mais on sait que le panneau photo-voltaïque est irradié à 1 000 $W \cdot m^{-2}$.
Dans le cours, on sait qu'il existe une relation relation reliant la puissance P, la tension U et le courant I :
$$\boxed{P = U \times I} \tag{7}$$
On cherche à déterminer une puissance **maximale** donc il faut prendre U et I maximaux. Donc, à partir de la courbe d'irradiance à 1 000 $W \cdot m^{-2}$, on détermine $I_{max} = 6$ A et $U_{max} = 55$ V. D'où :
$$P_{\text{Emax}} = U_{max} \times I_{max} \tag{8}$$
Application numérique : $\boxed{P_{\text{Emax}} = 330\ W}$.

4. En question 2., on a déterminé que le panneau photo-voltaïque recevait $P_L = 1622$ W. En question 3., on a déterminé que le panneau pouvait délivrer au maximum $P_{\text{Emax}} = 330$ W.
Le rendement η est donc :
$$\boxed{\eta = \frac{P_{\text{Emax}}}{P_L}} \tag{9}$$
Application numérique : $\boxed{\eta = 0,20 = 20\%}$.

D'après les données sur le marché des capteurs photo-voltaïques, il s'agit d'un **capteur photovoltaïque monocristallin**.

Partie 3 : Faisabilité de l'installation

1. Dans la partie précédente, on a déterminé qu'un panneau pouvait délivrer au plus une puissance $P_{\text{Emax}} = 330$ W.
Le four a besoin que l'ensemble des panneaux du toit lui fournisse $P_{\text{four}} = 6\,000$ W. On calcule donc le nombre de panneaux nécessaires au fonctionnement du four :
$$\frac{P_{\text{four}}}{P_{\text{Emax}}} = \frac{6000}{330} = 18,18 \tag{10}$$
Attention : l'application numérique donne 18,18 donc il y a le choix entre 18 et 19 panneaux :
— si on choisit 18 panneaux, ils pourront produit $18 \times 330 = 5\,940$ W donc il n'y aura pas une puissance suffisante pour alimenter le four ;
— si on choisit 19 panneaux, ils pourront produire $19 \times 330 = 6\,270$ W ce qui sera suffisant pour alimenter le four.
Donc, $\boxed{\text{19 panneaux sont nécessaires pour alimenter le four}}$.

Reste à savoir combien de panneaux peuvent être disposés sur le toit ! La surface du toit est $S_{\text{toit}} = 4,5 \times 6 = 27\ m^2$.
La surface d'un panneau est $S_{\text{panneau}} = 1,6224\ m^2$. On peut donc disposer un nombre de panneaux valant :
$$\frac{S_{\text{toit}}}{S_{\text{panneau}}} = \frac{27}{1,6224} = 16,64 \tag{11}$$

Que ce soit 16 ou 17 panneaux , **c'est insuffisant. Le toit de l'atelier ne permet pas de fournir une puissance** 6 000 **W au four.**

2. Plusieurs paramètres peuvent être cités :
   — la géométrie : on a calculé que 16 panneaux pouvaient tenir sur le toit. En réalité, c'est beaucoup moins. C'est facile à imaginer sur on avait pris un toit rond par exemple, mais c'est également le cas sur un toit rectangulaire : il n'est pas forcément possible de le recouvrir entièrement.
   — l'orientation du toit : le soleil ne pourra jamais irradié uniformément tous les panneaux !

Nota : l'énoncé n'est pas très clair, mais ici on a considéré un « demi » toit. Si on considère une surface double, l'installation devient largement faisable.

Exercice 2

---

1. **Une pile est non-rechargeable**, à usage unique. **Un accumulateur est rechargeable** donc à durée de vie infinie ! Il faut savoir que les accumulateurs (piles rechargeables) coûtent plus chers que les piles classiques. Or, la voiture consomme beaucoup d'électricité cela signifie qu'il faut souvent changer les piles : il vaut mieux utiliser une accumulateur, c'est plus rentable sur la durée. Pour la télécommande, qui consomme peu, des piles classiques suffisent, pas besoin d'investir dans un accumulateur.
2. Il s'agit d'un accumulateur 2 200 mAh. Donc $\boxed{Q = 2\,200 \text{ mAh}}$.On peut convertir les mAh en Coulomb C :

$$1\ mA \cdot h = 1\ mA \times 1\ h = 10^{-3}\ A \times 3600\ s = 3,6\ A \cdot s = 3,6\ C \tag{12}$$

   La quantité d'électricité s'exprime donc aussi $Q = 2200 \times 3,6$ C d'où

$$\boxed{Q = 7\,920\ C} \tag{13}$$

3. D'après le cours, l'énergie stockée dans l'accumulateur est

$$E_{\text{élec}} = Q \times U \tag{14}$$

   où U est la tension de l'accumulateur. Sinon ça se démontre rapidement $E = P \times t = U \times I \times t$ or $I \times t = Q$ donc $E = U \times Q$.
   D'après les documents, $U = 7,2$ V.
   Application numérique : $E_{\text{élec}} = 7920 \times 7,2 = 57024 \implies \boxed{E_{\text{élec}} = 57 \text{ kJ}}$

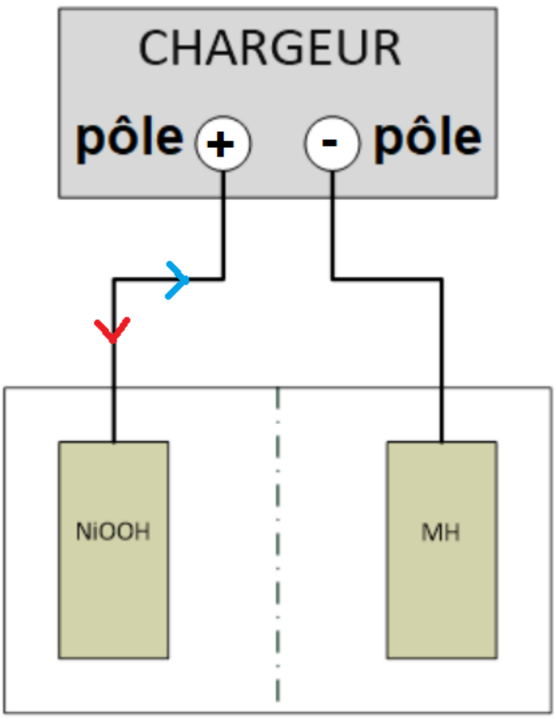
4. D'après le document 1, $P_{\text{élec}} = 40$ W.Le moteur absorbe donc une puissance $P_{\text{élec}}$. L'accumulateur, plein, dispose d'une énergie $E_{\text{élec}}$. Et on connait la relation reliant énergie et puissance : $E = P \times \Delta t$. Donc

$$\boxed{\Delta t = \frac{E_{\text{élec}}}{P_{\text{élec}}}} \tag{15}$$

   Application numérique : $\boxed{t = 1425\ s}$, soit quasiment 24 minutes.
5. Il faut clairement utiliser les demi-équations du document 2. Pour identifier les couples Ox/Red, il faut se souvenir de la relation « Ox + ne^- = Red ». Donc les ions qui sont du côté des électrons sont les oxydants. Et inversement pour les réducteurs. Donc les couples Ox/Red sont $\boxed{M_{(s)}/MH_{(s)} \text{ et } NiOOH_{(s)}/Ni(OH)_{2(s)}}$.

6. La **réduction** aboutit à la formation d'un réducteur. L'**oxydation** aboutit à la formation d'un **oxydant**. Une espèce « formée » est à droite de la flèche $\longrightarrow$. Donc il faut trouver l'équation qui aboutit à la formation de $MH_{(s)}$ ou de $Ni(OH)_{2(s)}$. La demi-équation de réduction est donc
$$\boxed{M_{(s)} + H_2O_{(\ell)} + e^- \longrightarrow MH_{(s)} + HO^-_{(aq)}} \tag{16}$$
7. Pour obtenir l'équation globale de fonctionnement, il faut sommer les 2 demi-équations d'oxydation et de réduction. Cela donne :
$$M_{(s)} + H_2O_{(\ell)} + e^- + Ni(OH)_{2(s)} + HO^-_{(aq)} \leftrightarrows MH_{(s)} + HO^-_{(aq)} + NiOOH_{(s)} + H_2O_{(\ell)} + e^- \tag{17}$$
On supprime les éléments qui sont deux côtés de l'équation : e^-, $H_2O_{(\ell)}$, $HO^-_{(aq)}$:
$$\boxed{M_{(s)} + Ni(OH)_{2(s)} \leftrightarrows MH_{(s)} + NiOOH_{(s)}} \tag{18}$$
8. On sait plusieurs choses :
   — le courant, lors de la charge, part du pôle ⊕ pour aller vers le pôle ⊖ en passant par les électrodes ;
   — les électrons vont dans le sens opposé au courant ;
   — une électrode où se produit une oxydation est une **anode** ;
   — une électrode où se produit une réduction est une **cathode** ;
   — initialement, l'électrode gauche est composée uniquement de $NiOOH_{(s)}$. Vu les demi-équations données dans l'énoncé, il ne peut y avoir que réduction de $NiOOH_{(s)}$ en $Ni(OH)_{2(s)}$. L'électrode gauche est donc une cathode ;
   — initialement, l'électrode droite est composée uniquement de $MH_{(s)}$. Vu les demi- équations données dans l'énoncé, il ne peut y avoir qu'oxydation de $MH_{(s)}$ en $M_{(s)}$. L'électrode droite est donc une anode ;
   — En charge, les cathodes sont liées au ⊕ ;
   — En charge, les anodes sont liées au ⊖.

   Mnémotechnique : a**N**ode, **N** comme **N**égatif.



9. L'accumulateur Li-ion présente plusieurs défauts : un nombre de cycles plutôt faible (500), un densité massique importante (150 à 190 Wh/kg), et est potentiellement explosive donc nécessite un circuit de protection. Plutôt gênant pour une simple voiture électrique ! L'accumulateur Li-ion est donc moins performant (nombre de cycles), plus lourd (densité massique) et plus dangereux (circuit de protection) que l'accumulateur Ni-Mh. $\boxed{\text{Il faut donc choisir un accumulateur Ni-MH}}$.

Exercice 3

Question 1

a. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. La solution est la somme d'une **solution homogène** et d'une **solution particulière**.
   - solution particulière y_p : la technique est de prendre $y' = 0$ et de trouver la valeur de y. Cela donne $100 \times y_p = 8$, soit $\boxed{y_p(t) = \frac{8}{100}}$.
   - solution homogène y_h : la technique est de prendre le second membre nul : $y' + 100y = 0 \iff y' = -100y$. Par le cours, on sait que la solution est de la forme $\boxed{y_h(t) = Ae^{-100t}}$ avec $A \in \mathbb{R}$ une constante.

   La solution totale v est donc $\forall t \in [0, +\infty[$, $v(t) = y_p(t) + y_h(t)$. Soit, $\forall t \in [0, +\infty[$,

$$v(t) = \frac{8}{100} + A\exp(-100t) \qquad A \in \mathbb{R} \tag{19}$$

   Nous avons toujours pas pris en compte la condition initiale $v(0) = 0$: c'est pour cela que A reste indéterminée. En la prenant en compte :

$$0 = \frac{8}{100} + A \times 1 \implies \boxed{A = -\frac{8}{100}} \tag{20}$$

   Au total,

$$\boxed{\forall t \in [0, +\infty[, \quad v(t) = \frac{8}{100}\left(1 - \exp(-100t)\right)} \tag{21}$$

b. Il suffit de faire l'application numérique avec $t = 0,01$ s.
   <u>Application numérique :</u> $\boxed{v(t = 0,01s) = 0,051\ m \cdot s^{-1}}$.

Question 2

— Vu l'expression que l'on doit obtenir, on va utiliser la formule $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$:

$$u(t) = U_{max}\cos(\omega t + \varphi) = U_{max}\cos(\omega t)\cos(\varphi) - U_{max}\sin(\omega t)\sin(\varphi) \tag{22}$$

On doit donc trouver U_{max}, ω et φ tels que :

$$u(t) = U_{max}\cos(\varphi)\cos(\omega t) - U_{max}\sin(\varphi)\sin(\omega t) = \frac{7\sqrt{3}}{4}\cos(100t) - \frac{7}{4}\sin(100t) \tag{23}$$

On reconnaît directement le terme en ωt : $\boxed{\omega = 100 \text{ rad} \cdot s^{-1}}$ On identifie également les deux termes devant les fonctions temporelles ce qui nous donne :

$$\begin{cases} U_{max}\cos(\varphi) &= \dfrac{7\sqrt{3}}{4} \\ U_{max}\sin(\varphi) &= \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

En faisant le quotient de ces deux équations, on se débarrasse de U_{max} et on obtient

$$\tan(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}} \tag{24}$$

Puis, l'équation $U_{max}\sin(\varphi) = \dfrac{7}{4}$ nous permet d'obtenir U_{max} :

$$U_{max} = \frac{7}{4}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} \implies \boxed{U_{max} = 3{,}5\ V} \tag{25}$$

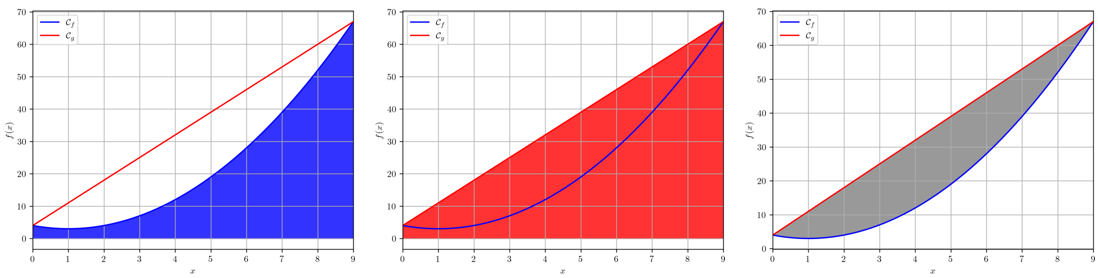
La tension peut donc se mettre sous la forme $\boxed{u(t) = 3{,}5\cos\left(100t + \dfrac{\pi}{6}\right)}$

b. On a donc $\boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad.}}$

Question 3

On cherche à déterminer l'aire située entre les deux courbes représentatives de f et de g. Dans le cours, on sait qu'il y a une façon de déterminer une aire : calculer une intégrale. On cherche donc l'aire grise :

aire grise = aire rouge - aire bleue



Donc si on appelle $\mathcal{A}$ l'aire grise , on a

$$\mathcal{A} = \int_0^9 g(x)\mathrm{d}x - \int_0^9 f(x)\mathrm{d}x \tag{26}$$

De là, 2 méthodes sont possibles.

Méthode 1 : on calcule les deux intégrales séparément pour calculer $\mathcal{A}$:

— $\displaystyle\int_0^9 g(x)\mathrm{d}x = \int_0^9 (7x+4)\mathrm{d}x = \left[7\frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^9 = \left(7 \times \frac{81}{2} + 4 \times 9\right) - 0 = \frac{639}{2}$

— $\displaystyle\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^9 (x^2 - 2x + 4)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^9 = \left(\frac{729}{3} - 81 + 4 \times 9\right) - 0 = 198$

Donc $\mathcal{A} = \dfrac{639}{2} - 198$. Après calculs,

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{243}{2}} \tag{27}$$

Méthode 2 : on utilise la linéarité de l'intégrale pour avoir une seule intégrale à calculer :

$$\mathcal{A} = \int_0^9 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \tag{28}$$

Or, $g(x) - f(x) = -x^2 + 9x$ donc

$$\mathcal{A} = \int_0^9 \left(9x - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[9\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^9 = \left(9 \times \frac{81}{2} - \frac{729}{3}\right) - 0 \tag{29}$$

Après calculs,

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{243}{2}} \tag{30}$$

Astuce : pour vérifier ou éviter de faire des calculs, on peut utiliser la calculatrice

$$\texttt{MATH} \longrightarrow \triangleright \longrightarrow \int \mathrm{d}x$$

Et là il n'y a plus qu'à écrire l'intégrande avec la variable `X` et les bornes !

Question 4

La tension aux bornes du condensateur est

$$u_c(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \tag{31}$$

On cherche un temps t, l'inconnue, telle que $u_c(t) = \dfrac{E}{2}$. On remplace donc sa valeur dans l'équation :

$$\frac{E}{2} = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \iff \frac{1}{2} = 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \iff \frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \tag{32}$$

On cherche à isoler t et on sait que la fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exp :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) = -\frac{t}{RC} \tag{33}$$

Or, $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ donc

$$-\ln(2) = -\frac{t}{RC} \iff \boxed{t = RC\ln(2)} \tag{34}$$

Or, $RC = 2$ s et $b\ln(a) = \ln(a^b)$ donc

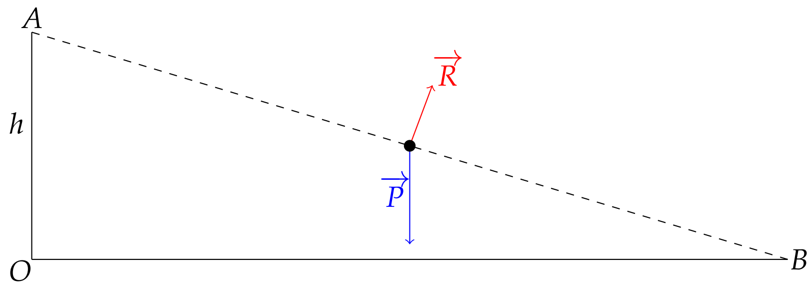
$$\boxed{t = \ln(4)} \tag{35}$$

Application numérique : $\boxed{t = 1{,}4\ \mathrm{s}}$

Exercice 4

1. On se place dans le $\boxed{\text{référentiel terrestre}}$, supposé galiléen.

2a. Un schéma est plus que nécessaire :



On sait, par le cours que le travail d'une force $\vec{F}$ qui agit sur un système entre A et B est

$$W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} \tag{36}$$

Ici, on peut exprimer le poids $\vec{P}$:

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{j} \tag{37}$$

Donc le travail du poids est $W_{\vec{P}} = -mg\vec{j} \cdot \overrightarrow{AB}$. Pour calculer ce produit scalaire, il faut projet $\overrightarrow{AB}$ sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -h\vec{j} + ||OB||\vec{i} \tag{38}$$

On peut donc calculer le travail :

$$W_{\vec{P}} = -mg\vec{j} \cdot \left(-h\vec{j} + ||OB||\vec{i}\right) \tag{39}$$

Puisque $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, il vient

$$\boxed{W_{\vec{P}} = mgh} \tag{40}$$

A retenir : le travail du poids est toujours $\pm mgh$, avec h la variation de hauteur. Le signe dépend de l'orientation du vecteur vertical (ici $\vec{j}$) de la base :
— s'il est ascendant, vers le haut, c'est $+mgh$;
— s'il est descendant, vers le bas, c'est $-mgh$.

2b. La réaction du support $\vec{R}$ est toujours orthogonale au mouvement de la balle donc le produit scalaire dans la définition du travail est nul :

$$\boxed{W_{\vec{R}} = \vec{R} \cdot \overrightarrow{AB} = 0} \tag{41}$$

A retenir : le travail d'une force de réaction est toujours nul car la force est toujours orthogonale au mouvement du système.

2c. La définition de l'énergie cinétique au point M est $E_c(M) = \frac{1}{2}mv_M^2$. La variation d'énergie cinétique entre A et B est donc

$$\boxed{\Delta E_c(A \to B) = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)} \tag{42}$$

On a calculé d'un côté des travaux de forces et de l'autre une variation d'énergie cinétique, on se doute donc qu'il faut appliquer le **théorème de l'énergie cinétique**. On rappelle son énoncé. Dans un référentiel galiléen tel que le référentiel terrestre, la variation de l'énergie cinétique d'un système de masse m entre un point A et un point B est égale à la somme des travaux des forces $\overrightarrow{F}$ agissant sur le système :

$$\Delta E_c(A \to B) = \sum W_{\overrightarrow{F}} \tag{43}$$

Ici, on a donc

$$\Delta E_c(A \to B) = W_{\overrightarrow{P}} + W_{\overrightarrow{R}} \tag{44}$$

Il vient,

$$\boxed{\frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = mgh} \tag{45}$$

2d. En simplifiant l'expression précédente,

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh} \tag{46}$$

<u>Application numérique :</u> $v_B = \sqrt{1,5^2 + 2 \times 10 \times 0,5} = \sqrt{12,25} \implies \boxed{v_B = 3,50\ m \cdot s^{-1}}$

3a. Ici la balle est soumise à deux forces :
- son propre poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{j}$;
- la réaction du support $\overrightarrow{R}$.

3b. On va encore utiliser le **théorème de l'énergie cinétique**. Les travaux des forces sont :
- $W_{\overrightarrow{R}} = 0$, on l'a vu précédemment. Cela se voit ici aussi car la balle se déplace horizontalement et la réaction du support est purement verticale : il y a donc orthogonalité.
- $W_{\overrightarrow{R}} = 0$, car ici aussi le poids est purement vertical donc orthogonal au mouvement de la balle. On peut aussi utiliser « mgh » sauf qu'ici la variation de hauteur est nulle donc h et donc $W_{\overrightarrow{R}} = 0$.

Le théorème de l'énergie cinétique donne donc que

$$\Delta E_c(B \to C) = 0 \tag{47}$$

Donc $E_c(B) = E_c(C)$ et donc $v_C = v_B = 3,50\ m \cdot s^{-1}$. Ce n'est pas tout à fait le résultat demandé par la question. Mais si on applique le TEC entre B et un point quelconque $M \in [BC]$, telle que la vitesse en M soit v_1, on a $E_c(M) = E_c(B)$ et donc

$$\boxed{v_1 = v_B = 3,50\ m \cdot s^{-1}} \tag{48}$$

4a. On réalise la rédaction classique :
- <u>Système :</u> $\{\text{balle}\}$ de masse m
- <u>Référentiel :</u> terrestre, supposé galiléen
- <u>Forces extérieures :</u> poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{j}$, réaction du sol $\overrightarrow{R} = ||\overrightarrow{R}||\overrightarrow{j}$, frottement fluide linéaire $\overrightarrow{F_f} = -\alpha\overrightarrow{v} = -\alpha v_x\overrightarrow{i}$

La principal fondamental de la dynamique (la seconde loi de NEWTON) s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F_f} \tag{49}$$

Si on projette cette relation vectorielle sur $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} m \times v_x' & = & -\alpha v_x \\ m \times 0 & = & -mg + ||\overrightarrow{R}|| \end{array}\right.$$

Il n'y a effectivement pas de vitesse selon $\overrightarrow{j}$ sinon il y aurait décollement ou enfoncement de la balle dans le sol ! L'équation différentielle vérifiée par v_x est donc issue de la première équation :

$$\boxed{v_x' + \frac{\alpha}{m} v_x = 0} \tag{50}$$

Remarque : si on exploite la seconde relation, on aboutit à $||\overrightarrow{R}|| = mg$ et donc $\overrightarrow{R} = mg\overrightarrow{j}$: la réaction du sol compense exactement le poids !

4b. La solution proposée $v_x(t) = K\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)$ est exactement la solution de l'équation différentielle du premier ordre obtenue précédemment : c'est rassurant !
On prend $t = 0$ s comme étant l'instant où la balle quitte le point B. Donc $v_x(t = 0s) = v_1$.
Par ailleurs,

$$v_x(t = 0s) = K \times 1 = K \implies \boxed{K = v_1} \tag{51}$$

Donc l'expression de la vitesse est

$$\boxed{v_x(t) = v_1 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)} \tag{52}$$

4c. On calcule simplement l'intégrale donnée :

$$v_2 = \frac{1}{3,9}\int_0^{3,9} v_x(t)\mathrm{d}t = \frac{v_1}{3,9}\int_0^{3,9} \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\mathrm{d}t = \frac{v_1}{3,9}\left[-\frac{m}{\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\right]_0^{3,9} \tag{53}$$

En simplifiant,

$$v_2 = \frac{mv_1}{3,9\alpha}\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\right]_{3,9}^{0} = \frac{mv_1}{3,9\alpha}\left[\exp(0) - \exp\left(-\frac{3,9\alpha}{m}\right)\right] \tag{54}$$

D'où :

$$\boxed{v_2 = \frac{mv_1}{3,9\alpha}\left(1 - \exp\left(-\frac{3,9\alpha}{m}\right)\right)} \tag{55}$$

Application numérique : $v_2 = \frac{4,6 \times 10^{-2} \times 3,5}{3,9 \times 1,1 \times 10^{-3}}\left(1 - \exp\left(-\frac{3,9 \times 1,1 \times 10^{-3}}{4,6 \times 10^{-2}}\right)\right)$

$$\boxed{v_2 \simeq 3,34\ m \cdot s^{-1}} \tag{56}$$

4d. $v_2 = 3,34\ m \cdot s^{-1} \leq v_1 = 3,5\ m \cdot s^{-1}$ donc **les forces de frottement ralentissent la balle**.
4e. Le cours nous dit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(-x) = 0$ donc, par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} v_x(t) = 0} \tag{57}$$

Cela signifie qu'**au bout d'un temps très long, au-delà du point C, la balle s'arrête**. Si nous n'avions pas pris en compte les forces de frottement, la balle aurait continué son chemin à la vitesse v_1, ce qui est physiquement absurde.