Baccalauréat général

Session 2022 – Amérique du Nord

Épreuve de Mathématiques

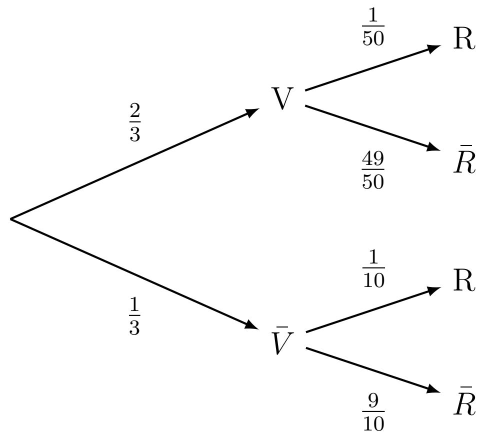
Sujet de spécialité n^{o} 1 — Proposition de corrigé

Ce corrigé est composé de 9 pages.

Exercice 1 — Probabilités

1. Étude d'une journée quelconque.

a. On résume la situation avec un arbre pondéré :



b. On peut alors exploiter cet arbre pour trouver la probabilité qu'il rate son train, en appliquant la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(V \cap R) + P(\bar{V} \cap R)$$

Ou, en exprimant avec les probabilités conditionnelles :

$$\boxed{P(R) = P(V)P_V(R) + P(\bar{V})P_{\bar{V}}(R)}$$

D'où,

$$P(R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{7}{150}$$

Paul ratera donc bien son train avec une probabilité $\underline{P(R) = \frac{7}{150}}$.

c. On sait que Paul a raté son train, et on cherche la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare. Autrement dit, on cherche $P_R(V)$.
D'après le théorème de Bayes :

$$\boxed{P_R(V) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)}}$$

D'où,

$$P_R(V) = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{50}}{\frac{7}{150}} = \frac{2}{7}$$

En ayant raté son train, Paul a donc pris le vélo pour se rendre à la gare avec une probabilité $\underline{P_R(V) = \frac{2}{7}}$.

2. Étude sur un mois quelconque.

a. On étudie le nombre de jours durant lesquels Paul s'est rendu à la gare à vélo. Autrement dit, on étudie la somme de l'expérience de Bernoulli « Paul emprunte son vélo » sur 20 jours.

La variable aléatoire X suit donc la loi Binomiale $\boxed{\mathscr{B}(n = 20, p = 2/3)}$.

b. La probabilité que Paul prenne son vélo pendant exactement 10 jours sur 20 vaut :

$$P(k=10) = \binom{20}{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = 0,054$$

Paul aura donc pris son vélo exactement 10 jours sur 20 avec une probabilité $\underline{P(k=10) = 0,054}$.

c. La probabilité que Paul emprunte son vélo au moins 10 fois correspond simplement à la somme des probabilités qu'il l'emprunte de 10 à 20 fois. Alors :

$$\boxed{P(k \geq 10) = \sum_{i=10}^{20} \left(\binom{20}{i} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{i} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{20-i} \right)}$$

La machine nous donne aisément ce résultat, qui vaut donc :

$$\underline{P(k \geq 10) = 0,962}$$

probabilité que Paul utilise son vélo 10 fois ou plus.

d. On cherche le nombre moyen de jours pendant lesquels Paul emprunte son vélo, *i.e.* la valeur de l'espérance de la variable aléatoire X.
On a, pour $X \hookrightarrow \mathscr{B}(20, 2/3)$:

$$E(X) = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} = 13$$

En moyenne, Paul utilisera donc son vélo plutôt que sa voiture pendant environ 13 jours.

3. On nous donne la loi suivie une variable aléatoire T.
T étant une variable aléatoire discrète, il vient son espérance sur son espace de réalisation :

$$E(T) = \sum_{k=10}^{18} k \times P(T=k) \underline{= 13,5\,\text{min}}$$

Ainsi, en empruntant sa voiture, le trajet de Paul durera, en moyenne, $\underline{T_m = 13,5\,\text{minutes}}$.

Exercice 2 — Suites

$$\begin{cases} T_0 = 180 \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9 \end{cases}$$

1. **a.** On cherche à montrer par récurrence que $T_n \geq 20$ pour tout entier n.

— Pour $n = 0$, on a $T_0 = 180 \geq 10$. La propriété est vraie au rang 0.

— Supposons la propriété vraie à un rang n quelconque, et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned} & T_n \geq 20 \\ \iff\ & 0,955T_n \geq 20 \times 0,955 = 19,1 \\ \iff\ & 0,955T_n + 0,9 \geq 19,1 + 0,9 = 20 \end{aligned}$$

Or, $0,995T_n + 0,9 = T_{n+1}$, et $20 \geq 20$.
Alors on a bien $T_{n+1} \geq 20$. La propriété est donc héréditaire.

— La propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire, alors par récurrence elle est vraie pour tout entier naturel n, et finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 20}$$

La suite (T_n) est donc minorée.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$T_{n+1} - T_n = 0,955T_n + 0,9 - T_n = -0,045T_n + 0,9$$

Or, $0,9 = -20 \times -0,045$. Alors finalement, on a bien :

$$\boxed{T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)}$$

Or, on a montré précédemment que $T_n \geq 20$ pour tout entier n, la quantité $(T_n - 20)$ est donc positive pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce qui signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n \leq 0$$

La suite (T_n) est donc décroissante.

c. On a d'abord montré que la suite (T_n) est minorée, puis on a montré qu'elle est décroissante.

Or, toute suite décroissante et minorée converge. Donc la suite (T_n) est convergente.

2. $u_n = T_n - 20$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On passe au rang $(n+1)$:

$$u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0,955T_n + 0,9 - 20 = 0,955T_n - 19,1$$
$$u_{n+1} = 0,955(T_n - 20)\underline{= 0,955u_n}$$

La suite (u_n) est donc bien géométrique, de raison $q = 0,955$.

b. Comme $u_0 = T_0 - 20 = 160$, il vient, pour tout entier naturel n, le terme général de la suite (u_n) :

$$u_n = 160 \times 0,955^n$$

Et finalement, comme $T_n = u_n + 20$ pour tout entier n, il vient :

$$\boxed{T_n = 160 \times 0,955^n + 20}$$

c. On cherche la limite de la suite (T_n).

Comme $0,955 < 1$, on sait que $\lim_{n\to+\infty} 0,955^n = 0$. Alors finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} 160 \times 0,955^n + 20 \underline{= 20}$$

d. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
T_n \leq 120 &\iff 160 \times 0,955^n + 20 \leq 120 \\
&\iff 160 \times 0,955^n \leq 100 \\
&\iff 0,955^n \leq \frac{100}{160} = \frac{5}{8} = 0,625 \\
&\iff e^{n\ln(0,955)} \leq 0,625 \\
&\iff n \geq \frac{\ln(0,625)}{\ln(0,955)} = 10,2
\end{aligned}$$

D'où [1],

$$T_n \leq 120 \iff \boxed{n \geq 11}$$

1. l'inégalité est renversée à la dernière équivalence car $\ln(0,955) < 0$.

3. **a.** La limite de (T_n) était prévisible dans ce contexte, car elle correspond à la température de l'air ambiant, et il est physiquement impossible que le gâteau, en sortant du four, ne refroidisse spontanément au-delà de la température ambiante.

b. La fonction Python réalise simplement, pour une température x donnée en paramètre, la résolution de l'inéquation $T_n \leq x$.

Ainsi, l'appel `temp(120)` renverra `11`, qui est le résultat obtenu lors de la résolution analytique.

Dans le contexte de l'exercice, le centre du gâteau, une fois sorti du four, atteindra la température de 120 °C au bout de 11 minutes environ.

Exercice 3 — Géométrie dans l'espace

$$J(2,0,1), K(1,2,1), L(-2,-2,-2)$$

1. **a.** On souhaite montrer que le triangle JKL est triangle en J. Ce qui revient à vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont orthogonaux.

On commence par calculer :

$$\overrightarrow{JK}\,(1-2, 2-0, 1-1) \implies \overrightarrow{JK}\,(-1,2,0)$$
$$\overrightarrow{JL}\,(-4,-2,-3)$$
$$\overrightarrow{KL}\,(-3,-4,-3)$$

On a alors :

$$\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{JL} = (-1)\times(-4) + 2\times(-2) + 0\times(-3) = 4 - 4 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont bien orthogonaux. Donc, d'après le théorème de Pythagore, le triangle JKL est rectangle en J.

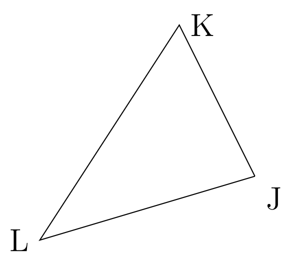
b. Le triangle JKL étant rectangle en J, son aire est donnée par :

$$\mathcal{A}(JKL) = \frac{\parallel \overrightarrow{JK} \parallel \times \parallel \overrightarrow{JL} \parallel}{2} = \frac{\sqrt{1+4+0}\times\sqrt{16+4+9}}{2} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{29}}{2}$$

D'où,

$$\boxed{\mathcal{A}(JKL) = \frac{\sqrt{145}}{2}\text{ cm}^2}$$

c. On cherche la valeur approchée de l'angle $\widehat{JKL}$.



Pour cela, la trigonométrie nous donne :

$$\tan \widehat{JKL} = \frac{\| \overrightarrow{JL} \|}{\| \overrightarrow{JK} \|} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{145}}{5} \approx 2,41$$

D'où, $\underline{\widehat{JKL} \approx \tan^{-1}(2,41) = 67,4\,\text{degrés}}$

2. **a.** On souhaite montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est normal au plan (JKL).

D'un côté, on a

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{JK} = 6 \times (-1) + 3 \times (2) + (-10) \times 0 = -6 + 6 = 0$$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{JK}$.
D'un autre côté, on a

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{JL} = 6 \times (-4) + 3 \times (-2) + (-10) \times (-3) = -24 - 6 + 30 = 0$$

$\vec{n}$ est donc orthogonal à $\overrightarrow{JL}$.
Or, par définition, tout vecteur de (JKL) peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$, et comme $\vec{n}$ est orthogonal à ces deux vecteurs, alors il est orthogonal à tout vecteur du plan.
Donc $\vec{n}$ est bien normal au plan (JKL).

b. Le vecteur $\vec{n}$ étant normal au plan, une équation cartésienne du plan (JKL) est $(JKL) : 6x + 3y - 10z + c = 0$ $(c \in \mathbb{R})$. Il reste alors à trouver la valeur de la constante c.
Comme $J(2, 0, 1) \in (JKL)$, on a $6 \times 2 + 0 - 10 + c = 0 \implies c = -2$.
D'où, $\boxed{(JKL) : 6x + 3y - 10z - 2 = 0}$ est une équation cartésienne du plan (JKL).

3. $T(10, 9, -6)$

a. On cherche une représentation paramétrique de la droite Δ passant par T et orthogonale à (JKL).
La droite Δ étant orthogonale au plan (JKL), elle admet pour vecteur directeur $\vec{n}$.
Ses représentations paramétriques sont donc de la forme :

$$\Delta : \begin{cases} x = x_0 + 6t \\ y = y_0 + 3t \\ z = z_0 - 10t \end{cases} , t \in \mathbb{R}, x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$$

Il reste alors à déterminer les constantes x_0, y_0 et z_0. Or, on sait que $T \in \Delta$. Alors on peut prendre $x_0 = x_T = 10$, $y_0 = y_T = 9$ et $z_0 = z_T = -6$.
Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\boxed{\Delta : \begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = 9 + 3t \\ z = -6 - 10t \end{cases} , t \in \mathbb{R}}$$

b. On cherche les coordonnées du point H, projeté orthogonal de T sur le plan (JKL). La droite Δ passant par T étant orthogonale au plan (JKL), cela revient à trouver les coordonnées du point d'intersection de Δ et (JKL).
Soit $H(x_H, y_H, z_H) \in \Delta \cap (JKL)$.
Premièrement, $H \in (JKL)$, donc ses coordonnées vérifient :

$$6x_H + 3y_H - 10z_H - 2 = 0 \tag{1}$$

Secondement, $H \in \Delta$, alors :

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_H = 10 + 6t \\ y_H = 9 + 3t \\ z_H = -6 - 10t \end{cases} \tag{2}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ vérifiant (2). Alors dans (1) :

$$\begin{aligned} & 6(10 + 6t) + 3(9 + 3t) - 10(-6 - 10t) - 2 = 0 \\ \iff\ & 60 + 36t + 27 + 9t + 60 + 100t - 2 = 0 \\ \iff\ & 145 + 145t = 0 \\ \iff\ & 145t = -145 \\ \iff\ & t = -1 \end{aligned}$$

Alors en injectant cette valeur de t dans l'équation paramétrique de Δ, il vient :

$$\begin{cases} x_H = 10 + 6 \times (-1) = 4 \\ y_H = 9 + 3 \times (-1) = 6 \\ z_H = -6 + 10 \times (-1) = 4 \end{cases}$$

Donc finalement, $\boxed{H(4, 6, 4)}$ projeté orthogonal de T sur (JKL).

c. On cherche le volume du tétraèdre $JKLT$. Or, on nous donne :

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

avec B aire d'une base.
Ici, nous avons précédemment calculé l'aire du triangle JKL.
De plus, la hauteur associée à cette base est le segment $[HT]$, dont nous connaissons les coordonnées des deux extrémités, donc leur distance. Cette dernière vaut :

$$HT = \sqrt{(10 - 4)^2 + (9 - 6)^2 + (-6 - 4)^2} = \sqrt{145}$$

Alors finalement,

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{145}}{2} \times \sqrt{145} = \frac{145}{6}$$

$$\boxed{V = \frac{145}{6}\ \mathrm{cm}^3}$$

Exercice 4 — Exponentielle

1. **VRAI**

Justification :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{(1+e^x)-(1-e^x)}{1+e^x} &= \frac{1+e^x-1+e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{2e^x}{1+e^x} = \frac{2}{\frac{1}{e^x}(1+e^x)} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{e^x}+\frac{e^x}{e^x}} = \frac{2}{1+e^{-x}} \end{aligned}$$

L'égalité est donc bien vérifiée pour tout réel x.

2. **VRAI**

Justification :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$g'(x) = \frac{e^x(1+e^x)-e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

Ce qui signifie que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, on remarque que $g(0) = \frac{1}{2}$ donc 0 est solution de $g(x) = \frac{1}{2}$.

Finalement, comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cette solution est unique.

(NB : *sans remarquer la solution évidente, on peut obtenir la même conclusion en calculant les limites en* $\pm\infty$ *de* g *et en exploitant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection, à la discrétion du lecteur.*)

3. **VRAI**

Justification :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

L'axe des abscisses est la droite $y = 0$, *i.e.* une droite horizontale. On cherche donc éventuels points critiques de f (donc les valeurs réelles annulant sa dérivée) ayant pour ordonnée 0.

Comme e^{-x} est une grandeur strictement positive, $f'(x)$ s'annulera en $x = 0$ et $x = 2$.

Or, $f(0) = 0$ et $f(2) = 2^2 \times e^{-2} \neq 0$.

L'axe des abscisses est donc tangent à $\mathcal{C}$ uniquement au point de coordonnées $(0, 0)$.

4. **FAUX**

Justification :

On cherche les points d'inflexion de h, donc les solutions réelles de $h''(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^x(1-x^2) - 2xe^x \\ \implies h''(x) &= e^x(1-x^2) - 2xe^x - 2e^x - 2xe^x \\ &= e^x(1-x^2-2x-2-2x) \\ h''(x) &= -(x^2+4x+1)e^x \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} h''(x) = 0 &\iff -(x^2+4x+1)e^x = 0 \\ &\iff x^2+4x+1 = 0 \end{aligned}$$

Or, l'équation du second degré $x^2+4x+1=0$ a pour discriminant $\Delta = 16-4 = 12 > 0$ et admet donc deux solutions réelles. La dérivée seconde de h s'annulera donc deux fois, signifiant que la courbe représentative de la fonction h admet deux points d'inflexion.

5. FAUX

Justification :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{e^x}{e^x+x} = \frac{1}{1+xe^{-x}}$$

Or, par croissance comparée, en $+\infty$, on a $xe^{-x} \to 0$.

Alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+x} = 1 \neq 0$$

6. VRAI

Justification :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On va étudier le signe de $1+e^{2x}-2e^x$.

En opérant le changement de variable bijectif $X = e^x$, cette expression devient :

$$1-2X+X^2$$

Or, $(-2)^2 - 4\times 1\times 1 = 0$, donc l'équation $1-2X+X^2 = 0$ admettra une unique solution. Autrement dit cette expression ne changera pas de signe et restera positive (facteur positif devant le terme de plus haut degré).

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, 1+e^{2x}-2e^x \geq 0$.

* *
*

Proposé par T. Prévost (thomas.prevost@protonmail.com),
pour le site https://www.sujetdebac.fr/
Compilé le 23 février 2023 après rectifications sur le corrigé original