Mathématiques - Polynésie 2022 - Sujet 1

Merci d'adresser vos remarques (liées à d'éventuelles coquilles, fautes ou erreurs de raisonnement) à anthony.le.bihan@icloud.com. Je ne réponds pas aux questions.

Exercice 1

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivable sur un tel intervalle et on se rappelle que $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $u'(x) = 2x + 1$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}}$$

2. L'intégration par parties est une méthode qui permet de répondre à cette question. Elle n'est malheureusement pas au programme. On dérive donc, une à une, le solutions proposées jusqu'à obtenir $\ln(x)$:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Et la meilleure pour la fin :

$$(x\ln(x) - x)' = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$

Le ln admet donc pour primitive sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\boxed{x \mapsto x\ln(x) - x}$.

3. C'est, *a priori*, une forme indéterminée. On transforme donc a_n afin de lever l'indétermination :

$$a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n} = \frac{3^n}{2^n}\frac{\frac{1}{3^n}-1}{\frac{1}{2^n}+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \times \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$

En se rappelant le cours sur les suites géométriques de raison q, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

Ainsi, produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty}$.

La question est plutôt « compliquée », et comme c'est QCM sans justification, on peut se contenter de déterminer la réponse à la calculatrice en tapant par exemple :

$$\frac{1-3^{99}}{1+2^{99}} = -2{,}7 \times 10^{17}$$

On déduit donc que la limite de la suite est $-\infty$.

4. La caractérisation des fonctions convexe/concave est :
   — f convexe $\iff$ f' croissante $\iff$ $f'' > 0$

— f concave $\iff$ f' décroissante $\iff$ $f'' < 0$

Les choses *vraies* que l'on peut tirer du tableau de variations sont donc :

— f est concave sur $[-2; 0]$;

— f est convexe sur $[0; 2]$.

La réponse est donc $\boxed{f \text{ est concave sur } [-2; 0]}$.

5. La caractérisation des variations d'une fonction est :

— f croît $\iff$ $f' \geq 0$;

— f décroît $\iff$ $f' \leq 0$.

Les choses *vraies* que l'on peut tirer de la courbe sont donc :

— f décroît sur $[-2; -1]$;

— f croît sur $[-1; 1]$;

— donc f admet un minimum local en -1;

— f décroît sur $[1; 3]$;

— f croît sur $[3; 4]$;

— donc f admet un maximum local en 3.

La réponse est donc $\boxed{f \text{ admet un maximum en 3 sur } [2; 4]}$.

6. J'explique programme par programme ce qu'il se passe :

— le d : la condition `if v<200` est directement vérifiée, donc m prend la valeur 1 puis le programme retourne $m = 1$.

— le c : c'est une boucle `for` et à chaque itération `v` augmente de 3%. Le programme renvoie donc $57 \times 1,03^{200} = 21053$.

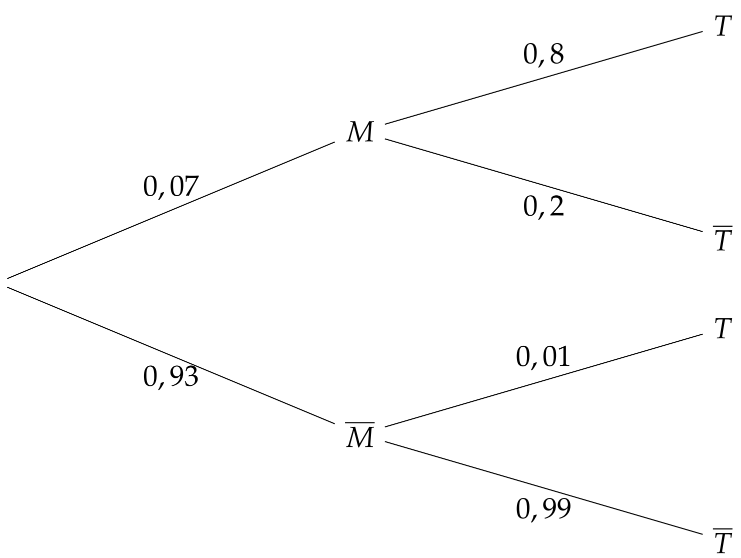
— le b : la condition `while v>200` n'est pas vérifiée initialement (car $v = 57$) donc on ne rentre pas dans la boucle. Le programme renvoie donc $m = 0$.

— le a : la condition `while v<200` est vérifiée initialement (car $v = 57$) donc on rentre dans la boucle `while` où m est augmenté de 1 et v est augmenté de 3%. On répète cette itération jusqu'à ce que $v \geq 200$ à l'iréation N. Le programme renvoie alors N. C'est bien ce qu'on recherche.

La réponse est $\boxed{\text{le programme a.}}$

Exercice 2

1. L'arbre pondéré est le suivant :



On sait, d'après la définition d'une probabilité conditionnelle : $P_M(T) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(M)}$.
Donc $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 \implies \boxed{P(M \cap T) = 0,056}$.

2. On cherche $P(T)$. Puisque $(M, \overline{M})$ forme un système complet d'éléments, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = P_M(T)P(M) + P_{\overline{M}}(T)P(\overline{M})$$

Ainsi, $P(T) = 0,056 + 0,01 \times 0,93 = 0,056 + 0,0093 \implies \boxed{P(T) = 0,0653}$. Cela permet au passage de vérifier que l'on ne s'est pas trompé à la 1.

3. $P_M(T)$ représente la probabilité d'être testé positif sachant qu'on est malade et $P_T(M)$ la probabilité la probabilité d'être malade sachant qu'on est testé positif. Si on est malade, à l'évidence, pas besoin de se faire testé. Donc, dans un contexte de dépistage, **il vaut mieux connaître la probabilité d'être malade sachant qu'on est testé positif,** $P_T(M)$.

4. On cherche $P_T(M)$. La formule d'une probabilité conditionnelle est $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)}$.
Ces deux probabilités ont déjà été calculées précédemment.
$P_T(M) = \dfrac{0,056}{0,0653} \implies \boxed{P_T(M) \simeq 0,86}$.

5a. On répète de manière successive et indépendante, $n = 10$ fois une épreuve de BERNOULLI dont le succès est « avoir un test positif » de probabilité de succès $p = P(T) = 0,0653$. X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,0653$.

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(10; 0,0653)}$$

5b. On cherche $P(X = 2)$:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0,0653^2 (1 - 0,0653)^{10-2} = 45 \times 0,0653^2 \times 0,9347^8$$

On trouve $\boxed{P(X = 2) = 0,11}$.

6. Ici, on considère une loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}(n; 0,0654)$ où n est inconnu, c'est ce que l'on cherche. L'évènement « au moins un test positif » correspond à $P(X \geq 1)$. Son évènement contraire est « aucun test positif », soit $P(X = 0)$. On peut aussi voir que $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$ or X est à valeur dans $\{0, 1, 2, ..., 10\}$ (X ne prend que des valeurs entières) donc $P(X < 1) = P(X = 0)$. Dans tous les cas, $\boxed{P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)}$.
Or,

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,0653^0 \times (1 - 0,0653)^{n-0} = 1 \times 1 \times 0,9347^n = 0,9347^n$$

Ainsi,

$$\boxed{P(X \geq 1) = 1 - 0,9347^n}$$

On cherche donc n tel que $P(X \geq 1) \geq 99\%$:

$$1 - 0,9347^n \geq 0,99 \iff -0,9347^n \geq -0,01 \iff 0,9347^n \leq 0,01$$

Par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(0,9347^n) \leq \ln(0,01) \iff n \ln(0,9347) \leq \ln(0,01)$$

Attention, erreur classique, $\ln(0,9347) < 0$ donc il faut changer le sens de l'inégalité lors de la division :

$$\boxed{n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9347)}}$$

Cela donne $n \geq 68,2$. **Il faut donc 69 personnes pour être sûr d'en avoir au moins une positive, à 99%.**

Exercice 3

1a. Après calculs et réduction : $\boxed{u_0 = \frac{1}{1}, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{3} \text{ et } u_3 = \frac{1}{4}}$.

1b. Le script est le suivant :

```python
def liste(k):
    L = []
    u = 1                       #valeur initiale de u, u0
    for i in range (0,k+1):     #i dans {1,2,3,...,k}
        L.append(u)             #ajout de u(i) à L
        u = u/(1+u)             #relation u(i+1)=u(i)/(1+u(i))
    return L
```

2. Il y a 2 méthodes, les deux sont dans le cours.
Méthode 1 : Calcul de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n \frac{1+u_n}{1+u_n} = \frac{u_n - u_n - u_n^2}{1+u_n} = -\frac{u_n^2}{1+u_n}$$

Or, $u_n > 0$ donc $u_n^2 > 0$ et $1 + u_n > 1$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est strictement décroissante**.
Méthode 2 : Calcul de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n}$$

Or $u_n > 0$ donc $1 + u_n > 1$ et donc $\frac{1}{1+u_n} < 1$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est strictement décroissante**.

3. On sait que :
— la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante ;
— la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 (car strictement positive).
D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4. Notons, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$. On peut écrire $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ une fonction qui est continue car dérivable sur R_+ Si on passe à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, puisque u_{n+1} à la même limite que u_n, on obtient :

$$\ell = f(\ell) \iff \ell - \frac{\ell}{1+\ell} = 0 \iff \frac{\ell^2}{1+\ell} = 0$$

(c'est en fait le même calcul que $u_{n+1} - u_n$). Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul. Donc $\ell^2 = 0 \implies \ell = 0$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

5a. D'après la question 1, on peut conjecturer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{n+1}}$.

5b. Notons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ ». Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Initialisation : on a $u_0 = 1 = \dfrac{1}{0+1}$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, *i.e.* que $u_n = \dfrac{1}{1+n}$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, *i.e.* que $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+n+1} = \dfrac{1}{2+n}$. Par définition de u_{n+1},

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

Puis, en injectant l'expression de u_n donnée par $\mathcal{P}(n)$:

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $n+1$, on obtient,

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1+1} = \frac{1}{2+n}$$

Autrement dit, on obtient $\mathcal{P}(n+1)$ et donc $\mathcal{P}(n)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{1+n}}$.

Exercice 4

1a. **Méthode 1 :** utilisation de la réciproque du théorème de PYTHAGORE. Calculons les longueurs AB, AC et BC.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

En normes au carré (longueurs au carré) cela donne :

$$AB^2 = 11 \quad AC^2 = 66 \quad BC^2 = 77$$

Autrement dit, on a

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Donc, d'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle ABC est rectangle en A.

Méthode 2 : utilisation du produit scalaire. Pour montrer que ABC est rectangle en A, il suffit de montrer que l'angle $\widehat{BAC}$ est droit *i.e.* que le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \times 4 + 1 \times 7 + (-3) \times 1 = -4 + 7 - 3 = 0$$

Ainsi, **le triangle ABC est rectangle en A.**

1b. On se ramène aux vecteurs qu'on a calculé précédemment :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -(-5+6-12) = -(-11) \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 11}$$

Par définition du produit scalaire, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\theta)$ où θ désigne l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. On a donc :

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \times BC} = \frac{11}{\sqrt{11} \times \sqrt{77}} = \frac{11}{\sqrt{11} \times \sqrt{7} \times \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

(il valait peut être mieux utiliser la réciproque de PYTHAGORE en a, car cela permettait de faire plein de calculs utiles pour la suite. Exemple ici avec BA et BC). Ainsi, par application de la fonction arccos,

$$\boxed{\widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \simeq 68°}$$

2a. D'après l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, on a directement que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Trouvons deux vecteurs directeurs du plan (ABC) et montrons que $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à ces vecteurs directeurs.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs de (ABC) et ils sont clairement non-colinéaires vu leurs expressions. D'une part,

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 - 1 + 3 = 0$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 - 7 - 1 = 0$$

Ainsi, $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{n}$ est donc normal au plan (ABC). Il l'est également au plan $\mathcal{P}$. Ainsi, **les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles**.

2b. On a donc que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à (ABC) donc $2x - y - z + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}$ est la forme de l'équation cartésienne de (ABC). Pour déterminer d, on peut par exemple dire que $A \in (ABC)$ donc les coordonnées de A doivent vérifier l'équation cartésienne :

$$2 \times 2 - (-1) - 0 + d = 0 \iff 5 + d = 0 \iff \boxed{d = -5}$$

Donc l'équation cartésienne de (ABC) est : $\boxed{2x - y - z - 5 = 0}$.

2c. Pour déterminer l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$, il nous faut :
— un vecteur directeur de $\mathcal{D}$: or, $\mathcal{D}$ est orthogonale à (ABC) et c'est également le cas de $\overrightarrow{n}$. Donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$;
— un point appartenant à $\mathcal{D}$: on a $E \in \mathcal{D}$.
Dans ce cas, la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est :

$$\begin{cases} x = x_E + n_x t \\ y = y_E + n_y t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_E + n_z t \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - t \end{cases}}$$

2d. H est le projeté orthogonal de E sur (ABC). Or, $\mathcal{D}$ est la droite orthogonale à (ABC) passant par E, donc $H \in \mathcal{D}$. De plus, par définition d'une projection orthogonale, $H \in$

(ABC). On a donc que H appartient à $\mathcal{D}$ et à (ABC), $E \in (\mathcal{D} \cap (ABC))$. Les coordonnées de H vérifient donc les équations de $\mathcal{D}$ et de (ABC) :

$$H \in (\mathcal{D} \cap (ABC)) \iff \begin{cases} 0 &= 2x - y - z - 5 \\ x &= 1 + 2t \\ y &= 2 - t \\ z &= 4 - t \end{cases}$$

La première équation est l'équation cartésienne de (ABC) déterminée en 2b et les 3 dernières sont les équations paramétriques de $\mathcal{D}$ déterminées en 2c. Si on injecte les expressions de $x(t), y(t)$ et $z(t)$ dans la première équation, on obtiendra la valeur de paramètre t associé à H, t_H :

$$2 \times (1 + 2t_H) - (2 - t_H) - (4 - t_H) - 5 = 0 \iff -9 + 6t_H = 0 \iff \boxed{t_H = \frac{3}{2}}$$

En injectant la valeur de paramètre de les équations paramétrique de $\mathcal{D}$, on obtiendra les coordonnées de H :

$$\begin{cases} x_H &= 1 + 2t_H \\ y_H &= 2 - t_H \\ z_H &= 4 - t_H \end{cases} \iff \begin{cases} x_H &= 1 + 2 \times \frac{3}{2} \\ y_H &= 2 - \frac{3}{2} \\ z_H &= 4 - \frac{3}{2} \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x_H &= 4 \\ y_H &= \frac{1}{2} \\ z_H &= \frac{5}{2} \end{cases}}$$

3. Calculons l'aire du triangle ABC qui, par 1a, est rectangle en A. Son aire est donc « la moitié d'un rectangle »

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BA \times AC}{2} = \frac{\sqrt{11} \times \sqrt{66}}{2} = \frac{11}{2}\sqrt{6}$$

On veut maintenant appliquer la formule du volume d'un pyramide à la pyramide $ABCE$ de base ABC et de hauteur HE (on a bien $H \in (ABC)$ et la droite (HE) orthogonale au plan (ABC) par définition du projeté orthogonal). On a donc $\boxed{\mathcal{B} = \mathcal{A}_{ABC}}$ et $\boxed{h = Eh}$.

$$\overrightarrow{EH} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ \frac{1}{2} - 2 \\ \frac{5}{2} - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \implies EH = \sqrt{9 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} \implies \boxed{EH = \frac{3\sqrt{6}}{2}}$$

Avec $\mathcal{B} = \frac{11}{2}\sqrt{6}$ et $h = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, on obtient que

$$\mathcal{V}_{ABCE} = \frac{\mathcal{B}h}{3} = \frac{11 \times 3 \times 6}{3 \times 2 \times 2} = \frac{33}{2} \implies \boxed{\mathcal{V}_{ABCE} = 16{,}5}$$

A choisir, il valait certainement mieux choisir l'exercice sur les suites plutôt que la géométrie dans l'espace. Il y avait, à mon sens, un net écart de difficulté (et donc de temps) entre ces deux exercices.