Mathématiques - Polynésie 2022 - Sujet 2

Merci d'adresser vos remarques à anthony.le.bihan@icloud.com.

Exercice 1

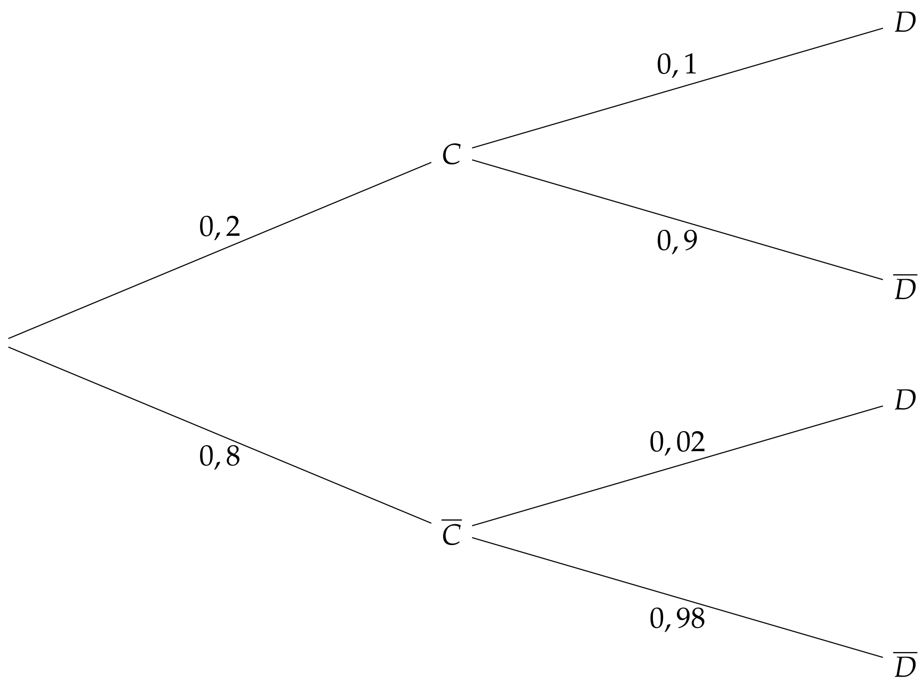
1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur un tel intervalle et,
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$
$\boxed{\text{La dérivée de } f \text{ est } \ln(x)}$
2. g peut se réécrire $g(x) = x^2 - x^2\ln(x)$. Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0$ par théorème de croissance comparée (le ln est une fonction à croissance lente tandis que la fonction carré est à croissance « normale »). Ainsi, par différence de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0}$
3. f a une racine évidente : 0. Cela permet sa factorisation $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x \times (x^2 - 0,9x - 0,1)$. Étudions le polynôme de degré 2 :
$\Delta = 0,9^2 + 4 \times 0,1 = 1,21 = 1,1^2 > 0 \implies x_1 = \dfrac{0,9-1,1}{2} = -0,1$ et $x_2 = \dfrac{0,9+1,1}{2} = 1$
Ainsi sous forme factorisée, $f(x) = x(x+0,1)(x-1)$ donc $\boxed{f \text{ possède 3 racines dans } \mathbb{R}}$
4. Dérivons une à une les expressions proposées en se rappelant que $(u \circ v)' = v' \times u'(v)$.
$$(H(2x))' = 2h(2x)$$
$$(2H(2x))' = 2 \times 2h(2x) = 4h(2x)$$
$$\left(\frac{1}{2}H(2x)\right)' = \frac{1}{2} \times 2h(2x) = h(2x)$$
$$(2H(x))' = 2 \times h(x) = 2h(x)$$
$\forall x \in \mathbb{R}$, une primitive de $k(x) = h(2x)$ est $\boxed{K(x) = \frac{1}{2}H(2x)}$;
5. D'une manière générale, l'équation de la tangente T à f au point d'abscisse a est
$$T : x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$$
Ici $a = 1$. f est dérivable sur l'ensemble des réels comme produit de telles fonctions et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$. Donc, $f'(1) = 2e$ et $f(1) = e$. Donc
$$T : x \mapsto 2e(x-1) + e \implies \boxed{y(x) = 2ex - e}$$
6. Cette question peut se faire à la calculatrice. A la main,
$$(0,2)^n < 0,001 \iff n \times \ln(0,2) < \ln(0,001) \text{ par stricte croissance du ln sur } \mathbb{R}_*^+$$
Attention erreur classique, $\ln(0,2) < 0$ donc il faut changer le sens de l'inégalité lorsqu'on divise par $\ln(0,2)$:
$$n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)}$$
Application numérique : $n > 4,29$. Or, n est un entier (naturel) donc il ne peut que prendre ses valeurs dans $\{0,1,2,3,4,5,6,\dots,\}$. Donc $\boxed{n \geq 5}$.

0.1

Exercice 2

Partie 1

1. L'arbre pondéré est le suivant :



La formule des probabilités conditionnelles dit $P_C(D) = \dfrac{P(D \cap C)}{P(C)}$. Ainsi

$$P(D \cap C) = P_C(D)P(C) = 0,1 \times 0,2 \implies \boxed{P(D \cap C) = 0,02}$$

2. Le système $(C, \overline{C})$ forme un système complet d'évènements, donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(D) = P(D \cap C) + P(D \cap \overline{C}) = P_C(D)P(C) + P_{\overline{C}}(D)P(\overline{C})$$

$P(D) = 0,02 + 0,02 \times 0,8 \implies \boxed{P(D) = 0,036}$. Cela permet indirectement de vérifier que la question 1 est juste.

3. On cherche $P_D(C)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles, $P_D(C) = \dfrac{P(D \cap C)}{P(D)}$.

On utilise donc 1. et 2. : $P_D(C) = \dfrac{0,02}{0,036} \implies \boxed{P_D(C) = 0,555}$.

Partie 2

1a. On répète 35 fois de manière successive et indépendante un tirage avec remise donc le succès correspond à l'évènement « tirer un casque défectueux » qui est de probabilité 0,036 (voir Partie 1, question 2). C'est donc la répétition de 35 épreuves de BERNOULLI de paramètre $p = 0,036$. X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 35$ et $p = 0,036$: $\boxed{X \sim \mathcal{B}(35; 0,036)}$.

1b. On cherche $P(X=1)$. Pour une loi binomiale,

$$P(X=1) = \binom{35}{1} \times 0,036^1 \times (1-0,036)^{35-1} = 35 \times 0,036 \times 0,964^{34}$$

On trouve $\boxed{P(X=1) = 0,362}$.

1c. $X(\Omega) = [\![0;35]\!]$ (ensemble des entiers de 0 à 35). Donc $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$. On a déjà calculé $P(X=1)$.

$$P(X=0) = \binom{35}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^{35} = 1 \times 1 \times 0,964^{35} = 0,964^{35} = 0,277$$

D'où $\boxed{P(X \leq 1) = 0,277 + 0,362 = 0,639}$.

3. L'évènement recherché correspond à $X \geq 1$ où $X \sim \mathcal{B}(n; 0,036)$. L'évènement contraire à celui recherché est « aucun casque n'est défectueux » : $P(X=0)$. Le calcul est simple :

$$P(X=0) = \binom{n}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^{n-0} = 1 \times 1 \times 0,964^n = 0,964^n$$

On a donc $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,964^n$. On cherche donc n tel que

$$1 - 0,964^n \geq 0,99$$

Cela donne :

$$1 - 0,964^n \geq 0,99 \iff -0,964^n \geq -0,01 \iff 0,964^n \leq 0,01$$

Par croissance du ln sur R_+^*,

$$\ln(0,964^n) \leq \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,964) \leq \ln(0,01) \iff \boxed{n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)}}$$

Attention, $\ln(0,964) < 0$ donc on change le sens de l'inégalité ! L'application numérique donne $n \geq 125,6$. **Il faut donc une population de** 126 **casques pour être sûr à 99% d'entre trouver un défectueux.**

Exercice 3

1. Le nombre d'oiseaux en 2022 correspond à u_1. Par définition,

$$u_1 = 0,008 \times u_0 \times (200 - u_0) = 0,008 \times 40 \times 160 \implies \boxed{u_1 = 51,2}$$

Selon ce modèle, il y aura 51 ou 52 oiseaux en 2002.

2. $f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff 0,008x(200-x) - x = 0 \iff x(1,6 - 0,008x - 1) = 0 \iff x(0,6 - 0,008x) = 0$. Un produit de 2 termes est nul si et seulement si l'un des termes est nul. Donc une solution est $x = 0$. L'autre est solution de

$$0,6 - 0,008x = 0 \iff 0,008x = 0,6 \iff x = \frac{0,6}{0,008} \iff x = 75$$

Les solutions, sur $\mathbb{R}$, de $f(x) = x$ sont $\boxed{x = 0 \text{ et } x = 75}$.

3a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de telles fonctions et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0,008x \times (-1) + 0,008 \times (200 - x) = -0,008x + 0,008 \times (200 - x)$$

Finalement, en factorisant,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0,016 \times (100 - x)$$

Ainsi, $f'(x) \geq 0 \iff 0,016 \times (100 - x) \geq 0 \iff 100 - x \geq 0 \iff x \leq 100$. **Ainsi, sur [0,100], $f' \geq 0$ et f est croissante.**

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ 100
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 80$

Avec :
— $f(0) = 0$
— $f(100) = 0,8 \times 100 = 80$

3b. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$: c'est la propriété de récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 40$, $u_1 = 51,2$ donc on a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 100$. Donc ; $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}}$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$. On veut montrer la propriété au rang suivant, $\mathcal{P}(n+1)$. On part de $\mathcal{P}(n)$ et on va construire une suite d'inégalités pour aboutir à $\mathcal{P}(n+1)$. On a donc, par $\mathcal{P}(n)$,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$$

Par application de f qui est croissante sur [0,100], à l'inégalité précédente,

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(100)$$

Or, $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_{n+2} = f(u_{n+1})$, $f(0) = 0$ et $f(100) = 80$ d'où

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 80 \leq 100$$

C'est $\mathcal{P}(n+1)$. On a donc montré que $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie. Autrement dit, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100}$.

Le résultat est montré par récurrence.

3c. La question 3b. montre que :
— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par 100).

D'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3d. Si on passe à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient, par continuité de f : $\ell = f(\ell)$. Autrement dit on doit résoudre $f(x) = x$: on l'a déjà fait en question 2. ! Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 75$. $\ell = 0$ est impossible car $u_0 = 40$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, $\boxed{\ell = 75}$.

4. On peut retenir de 3. que, $u_0 = 40$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $\ell = 75$. On peut donc restreindre l'inégalité de 3b. à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 40 \leq u_n \leq 75$$

Autrement dit, u_n n'atteint jamais 100 ! Donc, si on parcourt la fonction `seuil`, on rentre dans la boucle `while` et on n'en sort jamais ! **Le programme boucle infiniment en ne renvoie donc aucune valeur**.

Exercice 4

Partie 1 : première méthode

1. Les coordonnées sont :

$$\boxed{A(0;0;0) \qquad B(1;0;0) \qquad G(1;1;1)}$$

2. Pour déterminer l'orthogonalité, il faut déterminer les vecteurs directeurs de la droite (BK) et du plan (AIG).

Droite (BK) : $\overrightarrow{BK}$ est (sans surprise) un vecteur directeur de (BK). Ses coordonnées sont

$$\begin{pmatrix} 0-1 \\ \frac{1}{2}-0 \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix} \implies \boxed{\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Plan (AIG) : les vecteurs AI et AG sont des vecteurs directeurs du plan (AIG). Leurs coordonnées montrent qu'ils sont clairement non-colinéaires :

$$\boxed{\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Montrer que (BK) est perpendiculaire au plan (AIG) revient à montrer que $\overrightarrow{BK}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$.

— $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AI} = -\dfrac{1}{2} + 0 + \dfrac{1}{2} = 0$

— $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AG} = -1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$

Donc $\overrightarrow{BK}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ et donc **la droite** (BK) **est perpendiculaire au plan** (AIG)**.**

3. Les coordonnées de A, I et G vérifient toutes l'équation cartésienne. Donc $\boxed{2x - y - z = 0}$ est une équation cartésienne de (AIG).

Méthode plus élégante : $\overrightarrow{BK}$ est orthogonal à (AIG) donc $\overrightarrow{BK}$ est un vecteur normal de (AIG). Donc $-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$ est une équation cartésienne. A appartient à (AIG) donc il vérifie l'équation cartésienne : $0 + 0 + 0 + d = 0 \implies d = 0$. Donc $-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$ est une équation cartésienne et en multipliant l'égalité par -2, on obtient bien : $\boxed{2x - y - z = 0}$.

4. $\overrightarrow{BK}$ est un vecteur directeur de (BK) et B est un point de cette droite. Donc, une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_B + x_{BK}t \\ y & = & y_B + y_{BK}t \\ z & = & z_B + z_{BK}t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R} \quad \boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & \frac{1}{2}t \\ z & = & \frac{1}{2}t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}}$$

5. L est le projeté orthogonal de B sur le plan (AIG). Cela signifie 2 choses :
   - $L \in (BK)$, par orthogonalité ;
   - $L \in (AIG)$ par définition d'une projection.

   Ainsi,

$$L \in ((BK) \cap (AIG)) \iff L \text{ vérifie } \left\{\begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ x = 1 - t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2}t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}$$

   La première équation provient de $L \in (BK)$ et les 3 autres de $L \in (AIG)$. En combinant ces 4 équations :

$$2x - y - z = 0 \iff 2 \times (1-t) - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t = 0 \iff 2 - 3t = 0 \iff \boxed{t = \frac{2}{3}}$$

   Le paramètre associé au point L est donc $t = \frac{2}{3}$. En injectant la valeur de ce paramètre dans l'équation paramétrique de (AIG) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_L & = & 1 - \frac{2}{3} \\ y_L & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\ z_L & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \end{array}\right. \implies \boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x_L & = & \frac{1}{3} \\ y_L & = & \frac{1}{3} \\ z_L & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.}$$

   Ainsi, les coordonnées de L sont $\boxed{L\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)}$

6. Par définition du projeté orthogonal de B sur (AIG), la distance entre B et (AIG) est :

$$d(B, AIG) = ||\overrightarrow{BL}||$$

   Or,

$$\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \implies ||\overrightarrow{BL}|| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

   Ainsi,

$$\boxed{d(B, AIG) = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Partie 2 : deuxième méthode

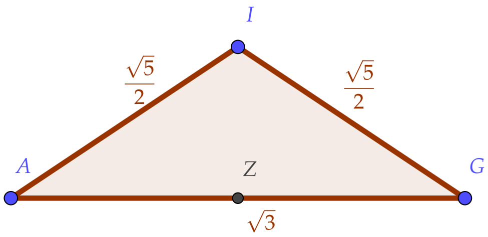
1a. La translation du segment [GF] le long du vecteur $\overrightarrow{FI}$ permet de construire le tétraèdre $ABIG$. **Donc [GF] est une hauteur relative de** (AIB).

1b. Par la formule de l'énoncé :

$$\mathcal{V}_{ABIG} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AIB} \times [GF]$$

I étant le milieu de EF, $\mathcal{A}_{AIB} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABFE} = \frac{1}{2}$. De plus, $[GF] = 1$. Donc $\boxed{\mathcal{V}_{ABIG} = \frac{1}{6}}$.

2. Définissons Z le milieu de $[AG]$ (le projeté orthogonal de I sur $[AG]$) :



Pour calculer l'aire d'un triangle isocèle, il faut faire le produit de sa base par sa hauteur et le diviser par 2. Sa base est $[AG] = \sqrt{3}$. Déterminons sa hauteur $[ZI]$. Dans le triangle AZI rectangle en Z, le théorème de PYTHAGORE dit que :

$$AI^2 = IZ^2 + AZ^2 \iff IZ^2 = AI^2 - AZ^2 \iff \boxed{IZ = \sqrt{AI^2 - AZ^2}}$$

Avec $AZ = \frac{1}{2}AG = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc, $IZ = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ainsi,

$$\mathcal{A}_{AIG} = \frac{[IZ] \times [AG]}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Or, $\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{3 \times 2}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. D'où :

$$\boxed{\mathcal{A}_{AIG} = \frac{\sqrt{6}}{4}}$$

3. En 1b., on a calculé le volume du tétraèdre $ABIG$ en considérant la base AIB et la hauteur GF. Mais aussi voir le tétraèdre $ABIG$ en considérant la base AIG et la hauteur .... BL ! (qui est bien orthogonale au plan AIG). La formule du volume de la pyramide peut donc également s'écrire :

$$\mathcal{V}_{ABIG} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AIG} \times [BL]$$

Avec $\mathcal{A}_{AIG} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ et $\mathcal{V}_{ABIG} = \frac{1}{6}$, on a

$$d(B, AIG) = [BL] = \frac{3\mathcal{V}_{ABIG}}{\mathcal{A}_{AIG}}$$

Or, $\frac{3\mathcal{V}_{ABIG}}{\mathcal{A}_{AIG}} = \frac{3}{6 \times \frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3 \times 2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. D'où

$$\boxed{d(B, AIG) = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Il est rassurant de constater, par les 2 méthodes, que la distance $d(B, AIG)$ est la même.