STI2D - PCM - Polynésie 2022

Merci d'adresser vos remarques (liées à d'éventuelles coquilles, fautes ou erreurs de raisonnement) à anthony.le.bihan@icloud.com. Je ne réponds pas aux questions.

Exercice 1 : Évolution de la température d'une boisson

1. Entre la boisson chaude et la tasse, il y a **conduction**. Entre la boisson chaude et l'air ambiant, il y a **convection**.
2. Pour $n = 1, \theta_2 = -0,002(\theta_1 - 20) + \theta_1 = -0,002 \times (89,9 - 70) + 89,9 \implies \boxed{\theta_2 = 89,7^\circ \text{ C}}$.
   De même, $\boxed{\theta_3 = 89,6^\circ \text{ C}}$.
3. On cherche à calculer le flux pour la première seconde donc $\Delta t = 1$ s et $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0 = -0,1^\circ$ C.
   Application numérique : $\phi = \dfrac{0,4 \times 4180 \times (-0,1)}{1} \implies \boxed{\phi = -167,2 \text{ W}}$. (On peut aussi répondre en J/s).
4. On sait que le sens des transferts thermiques naturels est : du corps le plus chaud vers le corps le plus froid. Donc le transfert thermique doit s'effectuer de la boisson chaude vers l'air ambiant. On trouve une puissance thermique $\phi < 0$: **la boisson cède effectivement de l'énegie à l'air ambiant**.
5. Le code *Python* est le suivant :

```
def temps():
    n=0
    theta=90
    while theta>50:
        n=n+1
        theta=-0,002*(theta-20)+theta
    return n
```

   Puisque $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et que $\theta_0 > 50$, il va exister une itération qui permettra de sortir de la boucle `while`.
6. Ce que nous retourne le programme c'est $n = 424$ est la première valeur telle que $\theta_{424} \leq 50$.
   La valeur retournée est en secondes. Cela correspond à 7 minutes et 4 secondes. **Au bout de 10 minutes (soit 600 secondes), on peut donc consommer la boisson sans se brûler**.
   Pour les plus curieux, le programme *Python* ci-dessous permet de déterminer la température en fonction de n et donc de déterminer θ_{600} :

```
def calcul_theta(n):
    theta=90
    for i in range(n):
        theta=-0.002*(theta-20)+theta
    print(theta)
[In 1] : calcul_theta(600)
[Out 1] : 41.058275950282095
```

   On trouve $\theta_{600} = 41^\circ\text{C} < 50^\circ\text{C}$: c'est rassurant.

Exercice 2 : Étude du son d'un violon

1. Graphiquement, on a 7 motifs en 18,25 ms. Donc un motif se reproduit en $\frac{18,25}{7}$. Donc $\boxed{T = 2,6 \text{ ms}}$.
2. On connaît la formule $f = \frac{1}{T}$. Avec $T = 2,6 \times 10^{-3}$ s, on trouve $\boxed{f = 384\text{Hz}}$. La fréquence trouvée avoisine bien les 390 Hz, aux incertitudes de mesures près.
3. Le pic A est le plus petit pic (en fréquence). C'est donc le **fondamental**. Il est situé autour de 390 Hz, qui est bien la fréquence émise par le violon.
4. Graphiquement, on lit $\boxed{f_B = 770 \text{ Hz}}$ et $\boxed{f_C = 1160 \text{ Hz}}$.
5. On effectue les rapports $\frac{f_B}{f_1} = \frac{770}{390} = 1,97 \simeq 2$ et $\frac{f_C}{f_1} = \frac{770}{390} = 2,97 \simeq 3$. On ne trouve pas exactement des entiers : c'est une nouvelle fois lié aux incertitudes de lecture. **La relation $f_n = n \times f_1$ est bien vérifiée**.
6. **L'harmonique B est de rang 2 et l'harmonique C est de rang 3**.
7. Déterminons la fréquence fondamentale du microcontrôleur : on lit $\boxed{\simeq 390 \text{ Hz}}$. Le microcontrôleur et la note du violon ont la même fréquence fondamentale : **ils ont donc la même hauteur**.
8. On remarque que le microcontrôleur possède aussi des **harmoniques autour de 810 et 1200 Hz**. La note du violon et le microcontrôleur ont donc quasiment les mêmes harmoniques et **leur timbre sont extrêmement proches**. Ainsi, **le son produit par le microcontrôleur est similaire à celui d'un violon.**

Exercice 3 : Mathématiques

Question 1

Méthode 1 : on résout l'équation différentielle et on trouve la solution proposée dans l'énoncé. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1 avec second membre. La solution générale est donc la somme d'une solution homogène et d'une solution particulière.
Solution homogène : $y_h(t) = K \exp(-0,1t), \quad K \in \mathbb{R}$
Solution particulière : je propose comme « technique » de prendre $y' = 0$ et la solution apparaît toute seule : $0 = -0,1 y_p(t) + 7 \implies y_p(t) = \frac{7}{0,1} = 70$.
La solution générale est donc

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = 70 + K \exp(-0,1t), \quad K \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer K, il faut utiliser la condition initiale : $y(t = 0) = 150$. A $t = 0$,

$$y(t = 0) = 70 + K \times \exp(0) = 70 + K \implies 70 + K = 150 \implies \boxed{K = 80}$$

Ainsi, la solution de l'équation différentielle avec la condition initiale $\theta(0) = 150$ est

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \theta(t) = 80 \exp(-0,1t) + 70}$$

Méthode 2 : on vérifie que la solution proposée est bien solution de l'équation différentielle ainsi que de la condition initiale

— pour la condition initiale : $\theta(t=0) = 80 + 70 = 150 \implies$ condition vérifiée
— pour l'équation différentielle : on calcule $\theta'(t) = -0,1 \times 80 \exp(-0,1t) = -8\exp(-0,1t)$. Puis on calcule

$$-0,1\theta(t) + 70 = -8\exp(-0,1t) - 7 + 7 = -8\exp(-0,1t)$$

On a donc $\theta' = -0,1\theta + 7$ et donc $\theta(t) = 80\exp(-0,1t) + 70$ **est bien solution de l'équation différentielle proposée avec sa condition initiale**.

Question 2

Pour écrire z sous forme exponentielle, il faut calculer son module r et son argument θ :

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, z est placé dans le coin supérieur gauche. Son argument vaut donc $\frac{\pi}{2}$ auquel il faut ajouter l'angle α entre l'axe des ordonnées et z. Cet angle est tel que $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \dfrac{1}{1}$. Mieux vaut faire un schéma pour s'en convaincre.

$$\theta = \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Ainsi,

$$\boxed{z = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

Puisqu'il est sous forme exponentielle, il est facile de calculer z^4 :

$$z = re^{i\theta} \implies z^4 = r^4 e^{4i\theta} \implies z^4 = 4e^{i3\pi} = 4e^{i\pi} = -4$$

Ainsi, $z^4 = -4 \in \mathbb{R}$, donc **la partie imaginaire de z^4 vaut 0**.

Question 3

« On admet que cette voiture a une énergie de stockage limitée à 18 kWh » signifie que E peut, au plus, valoir 18. Or E décroît (E représente l'énergie dans la batterie, qui est consommée). Donc $\boxed{E(0) = 18}$ et c'est bien ce qu'on retrouve quand on calcule $E(t=0)$. On cherche donc t_0 tel que $E(t_{1/2}) = \dfrac{E(0)}{2}$. On peut résoudre analytiquement :

$$E(t_0) = \frac{E(0)}{2} \iff E(0)(1 - e^{-0,45t_0}) = \frac{E(0)}{2} \iff 1 - e^{-0,45t_0} = \frac{1}{2} \iff e^{-0,45t_0} = \frac{1}{2}$$

En appliquant la fonction ln (réciproque de l'exponentielle, *i.e.* $\exp(\ln(x)) = \ln(\exp(x))$), on obtient :

$$-0,45t_0 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \iff \boxed{t_0 = \frac{\ln(2)}{0,45}}$$

Application numérique : $t_0 = 1,54$h. Or $0,54$ h $= 0,54 \times 60$ minutes$\simeq$ 32 minutes. D'où

$$\boxed{t_0 = 1 \text{ h } 32 \text{ min}}$$

Question 4

L'énoncé nous donne la dérivée f'. Pour étudier le sens de variation de la fonction f, il suffit d'étudier le signe de f'.

$f'(x)$ a le signe de (-3x+2).

$f'(x) > 0$ si x appartient à $]0\ ;\ 2/3[$ et $f(x)$ est strictement croissante sur cet intervalle.
$f'(x) < 0$ sur $]2/3\ ;\ +\infty[$ et $f(x)$ est strictement décroissante sur cet intervalle.
$f'(x) = 0$ si $x = 2/3$ et $f(x)$ présente un maximum.

x	0		2/3		$+\infty$
f'	‖	+	0	-	
f	‖	↗		↘	

Question 5

On injecte les solutions proposées dans le membre de gauche, jusqu'à obtenir $2\ln(5)$:

1. $x = 0$: ln non défini en 0 donc impossible ;
2. $x = e^{-5}$: $3\ln(e^{-5}) - \ln(e^{-5} + 30) = \ln\left(\dfrac{e^{-15}}{e^{-5}+30}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{e^{10}+30e^{15}}\right) = -\ln(e^{10} + 30e^{15}) < 0$. Or $2\ln(5) = \ln(5^2) = \ln(25) > 0$ donc impossible ;
3. $x = 10$: $3\ln(10) - \ln(40) = \ln(10^3) - \ln(40) = \ln\left(\dfrac{1000}{40}\right) = \ln(25) = \ln(5^2) = 2\ln(5)$. $x = 10$ est la solution ;
4. $x = 20$: $3\ln(20) - \ln(40) = \ln(20^3) - \ln(40) = \ln\left(\dfrac{8000}{40}\right) = \ln(200) \neq \ln(25)$

La réponse est $\boxed{x = 10}$.
La résolution analytique ferait intervenir un polynôme d'ordre 3... pas abordable en terminale.

Question 6

a. La hauteur initiale est la hauteur à $t = 0$: $h(t = 0) = -15 \times e^0 + 18 = -15 + 18 = 3$. **La hauteur initiale est de 3 mètres**.

b. Calculons la limite de la fonction h :

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = -15 \times \left(\lim_{t\to+\infty} e^{-0,2t}\right) + 18$$

Or, en posant $X = 0,2t$ (changement de variable), on a que

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-0,2t} = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = 0$$

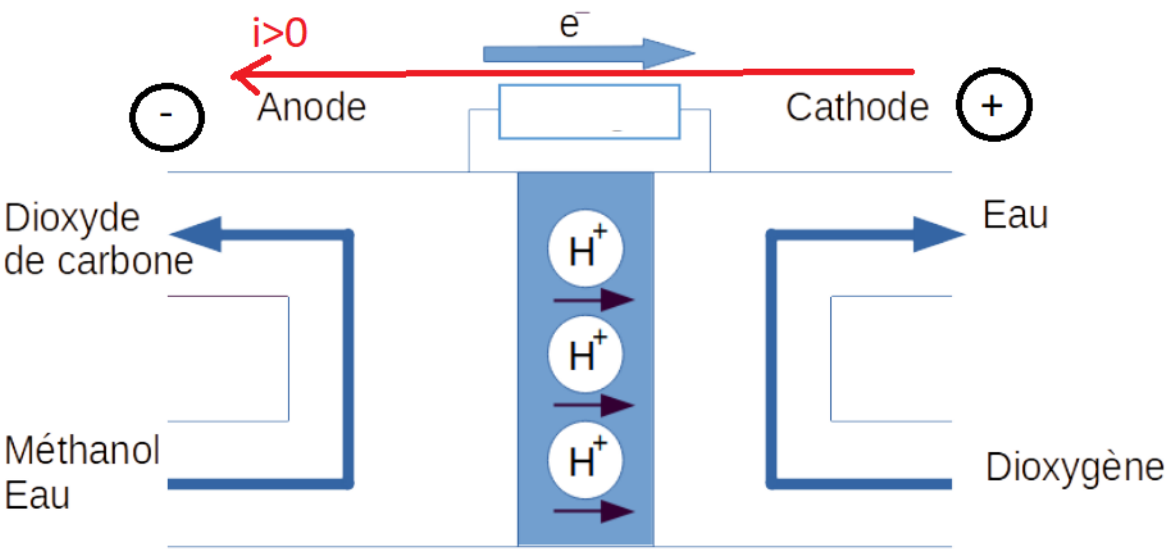
D'où,

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = -15 \times 0 + 18 = 18$$

La nacelle peut, au plus, s'élever à 18 mètres.

Exercice 4A : Pile à combustible au méthanol

1. **L'anode est le siège d'une oxydation. La cathode est le siège d'une réduction.**
2. On sait que : le courant circule du pôle + vers le pôle − à l'extérieur de la pile et que le courant positif et les électrons circulent en sens opposés. Cela permet d'obtenir :



3. A l'anode, on a le couple $CO_2(g)/CH_3OH(aq)$. Et on sait qu'il y a oxydation à l'anode donc : $CH_3OH(aq) + H_2O(\ell) \rightarrow CO_2(g) + 6H^+(aq) + 6e^-$.
   A la cathode, on a le couple $O_2(g)/H_2O(\ell)$. Et on sait qu'il y a réduction à la cathode donc : $O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(\ell)$.
   Avant de sommer ces demi-équations, il faut s'assurer qu'on éliminera les électrons. Si on multiplie la première par 2 et la deuxième par 3, on fait apparaître 12 e^- dans chacune :
   $$2CH_3OH(aq) + 2H_2O(\ell) \rightarrow 2CO_2(g) + 12H^+(aq) + 12e^-$$
   $$3O_2(g) + 12H^+(aq) + 12e^- \rightarrow 6H_2O(\ell)$$
   En les sommant, on obtient :
   $$3O_2(g) + 12H^+(aq) + 12e^- + 2CH_3OH(aq) + 2H_2O(\ell) \rightarrow 2CO_2(g) + 12H^+(aq) + 12e^- + 6H_2O(\ell)$$
   En réduisant,
   $$\boxed{3O_2(g) + 2CH_3OH(aq) \rightarrow 2CO_2(g) + 4H_2O(\ell)}$$

4. En sommant les masses molaires élémentaires :

$$\mathrm{M}(CH_3OH) = \mathrm{M}(C) + \mathrm{M}(O) + 4 \times \mathrm{M}(H) = 12 + 16 + 4 \times 1$$

Application numérique : $\boxed{\mathrm{M}(CH_3OH) = 32 \text{ g/mol}}$

5. Un litre d'éthanol pèse $m(CH_3OH) = \rho \times V$ avec $\rho = 792$ g/L et $V = 1$ L.
Application numérique : $\boxed{m(CH_3OH) = 792 \text{ g}}$.
On a donc une quantité de matière $n(CH_3OH) = \dfrac{m(CH_3OH)}{M(CH_3OH)} = \dfrac{792}{32}$

$$\boxed{n(CH_3OH) = 24,75 \text{ mol}}$$

6. Avec la demi-équation électronique $CH_3OH(aq) + H_2O(\ell) = CO_2(g) + 6H^+(aq) + 6e^-$, on voit qu'un mole de CH_3OH forme 6 moles d'électrons. On a donc $n(e^-) = 6n(CH_3OH)$.
Application numérique : $n(e^-) = 6 \times 24,75 \implies \boxed{n(e^-) = 148,5 \text{ mol}}$. Je n'ai fait aucun arrondi de calcul depuis le début de l'exercice, il est donc impossible de trouver exactement 149 moles. Et il n'y a aucune raison d'arrondir 148,5 à 149 plutôt qu'à 148.
7. On applique la formule donnée dans l'énoncé : $Q = n(e^-) \times \mathcal{F}$.
Application numérique : $Q = 149 \times 96500 \implies \boxed{Q = 144 \times 10^5 \text{ C}}$. L'énoncé donne que 1 A.h = 3600 C donc $Q = \frac{149 \times 96500}{3600} \implies \boxed{Q = 4000 \text{ A.h}}$
8. Raisonnons par homogénéité : on a Q en A.h et on veut obtenir de kW.h. On a la relation bien connue $P = U \times I$ avec U en V et I en A. Il faut donc multiplier Q par une tension pour obtenir une énergie. Si la pile avait un rendement de 100%, elle fournirait une énergie égale à QU_{pile}. Or son rendement vaut $\eta = 25\%$ donc l'énergie qu'elle peut fournir est

$$\boxed{E_{\text{pile}} = \eta Q U_{\text{pile}}}$$

avec $U_{\text{pile}} = 12$ V, donnée dans l'énoncé.
Application numérique : $\boxed{E_{\text{pile}} = 12\text{kW.h}}$
9. En supposant que la batterie est parfaite (rendement unitaire), l'énergie qu'elle peut absorber et donc délivrer par la suite est :

$$E_{\text{batterie}} = Q_{\text{batterie}} \times U_{\text{batterie}}$$

Application numérique : $E_{\text{batterie}} = 1200\text{W.h}$.
On a donc $\dfrac{E_{\text{pile}}}{E_{\text{batterie}}} = \dfrac{12000}{1200} = 10$, soit $\boxed{E_{\text{pile}} = 10 \times E_{\text{batterie}}}$. Autrement dit, la pile peut recharger 10 fois la batterie.

Exercice 4B : Combustion du kérosène

1. Le pictogramme encadré signifie **inflammable**. Il faut donc **manipuler le kérosène loin de toute flamme ou étincelle et le conserver à l'abri de la chaleur**.
2. On équilibre en atomes d'hydrogène puis en oxygène. A gauche, il y en a 44. Il faut donc mettre 22 $H_2O(\ell)$ à droite pour avoir 44 atomes d'hydrogènes. Ensuite, on a $20 \times 2 + 22 \times 1 = 62$ atomes d'oxygène à droite. Il faut donc 31 $O_2(g)$ à gauche. L'équation finale est :

$$\boxed{2C_{10}H_{22}(\ell) + 31O_2(g) \rightarrow 20CO_2(g) + 22H_2O(g)}$$

3. On a m_k = 500 kg et $M_k = 142 \times 10^{-3}$ kg/mol. Et on sait que $n_k = \frac{m_k}{M_k}$.

   Application numérique : $\boxed{n_k = 3521 \text{ mol}}$

4. D'après l'équation de la réaction, pour 2 moles de kérosène consommées, 20 moles de CO_2 sont formées. On a donc $\boxed{n_{CO_2} = 10 n_k}$.

   Application numérique : $n_{CO_2} = 10 n_k = 10 \times 3521 \Longrightarrow n_{CO_2} \boxed{= 3,52 \times 10^4 \text{ mol}}$

5. La masse molaire du CO_2 est $M_{CO_2} = M_C + 2 \times M_O = 12 + 2 \times 16 = 44$ g/mol $= 44 \times 10^{-3}$ kg/mol. On a donc une masse $m_{CO_2} \boxed{= n_{CO_2} \times M_{CO_2}.}$

   Application numérique : $\boxed{m_{CO_2} = 1549 \text{ kg}}$

6. On rejette 1549 kg de CO_2 pour 24h de combustion. Or le trajet dure 560 h. Une avion équivalent, rejetterait donc 560 × 1549 / 24 = $\boxed{\text{36 tonnes}}$ de CO_2