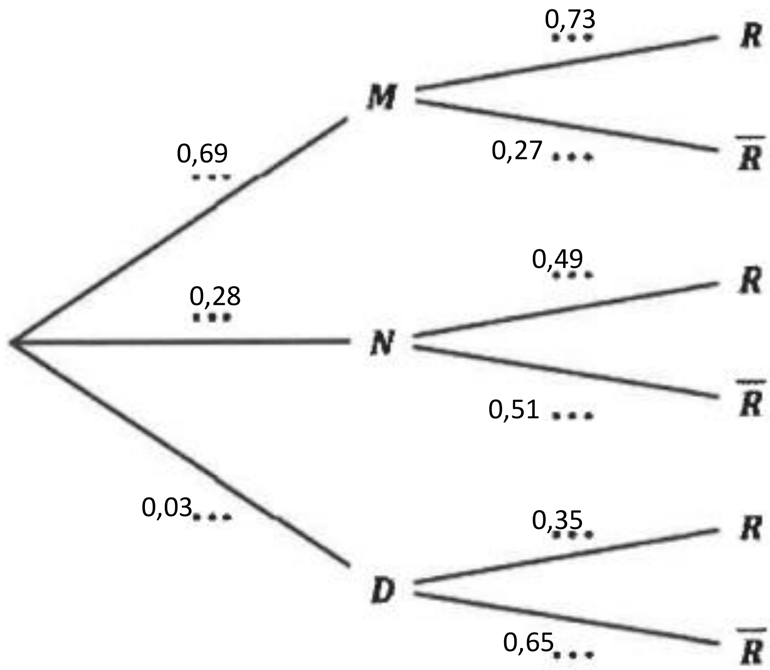
CORRECTION DU BAC : SPECIALITE MATHEMATIQUES – AMERIQUE DU NORD 2023 - JOUR 1

Exercice 1 : Probabilités

D'après l'énoncé, $P(M) = 0{,}69$, $P(N) = 0{,}28$, $P_M(R) = 0{,}73, P_N(R) = 0{,}49$ et $P_D(R) = 0{,}35$.

Partie A :

1. $P(D) = 1 - \big(P(M) + P(N)\big) = 1 - (0{,}69 + 0{,}28) = 0{,}03$
$P_M(\bar{R}) = 1 - P_M(R) = 1 - 0{,}73 = 0{,}27$ $\quad$ $P_N(\bar{R}) = 1 - P_N(R) = 1 - 0{,}49 = 0{,}51$
$P_D(\bar{R}) = 1 - P_D(R) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$



2. On calcule $P(D \cap R)$.
$P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0{,}03 \times 0{,}35 = 0{,}0105$
La probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est de 0,0105.

3. $P(M \cap \bar{R}) = P(M) \times P_M(\bar{R}) = 0{,}69 \times 0{,}27 = \mathbf{0{,}1863.}$
La probabilité que le déchet soit minéral et non dangereux et recyclable est de 0,1863.

4. D'après la formule des probabilités totales :
$P(R) = P(M \cap R) + P(N \cap R) + P(D \cap R)$
$P(R) = P(M) \times P_M(R) + P(N) \times P_N(R) + P(D) \times P_D(R)$
$P(R) = 0{,}69 \times 0{,}73 + 0{,}28 \times 0{,}49 + 0{,}03 \times 0{,}35 = 0{,}5037 + 0{,}1372 + 0{,}0105$

$\boldsymbol{P(R) = 0,6514}$

5. On calcule $P_R(N) = \frac{P(N\cap R)}{P(R)} = \frac{P(N)\times P_N(R)}{P(R)} = \frac{0,28\times 0,49}{0,6514} \approx 0,2106$
La probabilité que le déchet prélevé soit non minéral et non dangereux sachant qu'il est recyclable est d'environ 0,2106.

Partie B :

1. a. On sait que X suit une loi binomiale. L'épreuve de Bernoulli est répétée 20 fois et son succès est « le déchet est recyclable » de probabilité 0,6514.
Ainsi, **la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ suit la loi binomiale $\boldsymbol{B(20\,;0,6514)}$.**

b. On calcule $P(X = 14)$
$P(X = 14) = \binom{20}{14} \times 0,6514^{14} \times (1 - 0,6514)^6 = 38760 \times 0,6514^{14} \times 0,3486^6$
$P(X = 14) \approx 0,1723$
Ainsi, **la probabilité que 14 déchets de l'échantillon prélevé soient recyclables est d'environ 0,1723.**

2. a. Prélever un déchet est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « le déchet est recyclable » de probabilité 0,6514.
On répète n fois cette épreuve de façon identique et indépendante (le nombre de déchets est suffisamment grand pour pouvoir considérer cette situation comme un tirage avec remise). On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = 0,6514$.
On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le nombre de déchets recyclables). Cette variable aléatoire suit donc la loi binomiale $B(n\,;0,6514)$.
Pour tout entier naturel $n > 0, p_n = P(Y = 0) = \binom{n}{0} \times 0,6514^0 \times 0,3486^n$
$\boldsymbol{p_n = 1 \times 1 \times 0,3486^n = 0,3486^n}$

b. On cherche $P(Y \geq 1)$
Pour tout entier naturel $n > 0$,
$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - p_n = 1 - 0,3486^n$
On cherche donc le plus entier naturel n tel que $1 - p_n > 0,9999$.
$1 - p_n > 0,9999 \Leftrightarrow p_n < 0,0001 \Leftrightarrow 0,3486^n < 0,0001$
$\Leftrightarrow \ln(0,3486^n) < \ln 0,0001$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
$\Leftrightarrow n \ln 0,3486 < \ln 0,0001 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,0001}{\ln 0,3486}$ car la fonction logarithme népérien est strictement négative sur $]0\,;1[$.
Or, $\frac{\ln 0,0001}{\ln 0,3486} \approx 8,74$, donc $n \geq 9$. Ainsi, **le plus petit naturel $\boldsymbol{n}$ tel que la probabilité qu'au moins un déchet de l'échantillon soit recyclable soit supérieur à 0,9999 est 9.**

__Exercice 2 :__ **Fonctions**

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

1. **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$ donc par somme $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty}$**.**

   b. En $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée.
   Pour tout réel x, $g(x) = e^{2x}\left(3 - \frac{2x}{e^{2x}} - \frac{3}{e^{2x}}\right) = e^{2x}\left(3 - \frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}} - \frac{3}{e^{2x}}\right)$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{e^{2x}}\right) = 0$
   De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ (croissance comparée) donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$ et par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3 - \frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}} - \frac{3}{e^{2x}}\right) = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ donc par produit $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$**.**

2. **a.** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $\boldsymbol{g'(x) = 2 \times 3e^{2x} - 2 = 6e^{2x} - 2}$**.**

   b. Pour tout réel x, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 6e^{2x} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x > \ln\frac{1}{3}$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\ +\infty[$.
   $\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}\ln 3$.
   Ainsi, $\boldsymbol{g'(x) > 0}$ **sur** $\boldsymbol{]-\frac{1}{2}\ln 3\,;\ +\infty[}$, $\boldsymbol{g'(x) = 0}$ **en** $\boldsymbol{-\frac{1}{2}\ln 3}$ **et** $\boldsymbol{g'(x) < 0}$ **sur** $\boldsymbol{]-\infty\,; -\frac{1}{2}\ln 3\,[}$**.**

   c. Ainsi, on a :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$\boldsymbol{-\frac{1}{2}\ln 3}$	$+\infty$
Variations de $\boldsymbol{g}$	$+\infty$	$\boldsymbol{g(-\frac{1}{2}\ln 3)}$	$+\infty$

   $g\left(-\frac{1}{2}\ln 3\right) = 3e^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\ln 3} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\ln 3 - 3 = 3 \times \frac{1}{3} + \ln 3 - 3 = \ln 3 - 2.$
   Ainsi, $\boldsymbol{g}$ **admet pour minimum** $\boldsymbol{\ln 3 - 2}$**.**

3. **a.** On calcule $g(0)$.
   $g(0) = 3e^{2\times 0} - 2 \times 0 - 3 = 3 - 3 = 0$, donc **0 est solution de l'équation** $\boldsymbol{g(x) = 0}$**.**

b. Sur $[-\frac{1}{2}\ln 3\ ;\ +\infty[$, la fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante, $g\left(-\frac{1}{2}\ln 3\right) = \ln 3 - 2 < 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $0 \in [\ln 3 - 2\ ;\ +\infty[$.
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-\frac{1}{2}\ln 3\ ;\ +\infty[$, celle-ci étant 0 d'après la question précédente.
Sur $]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\ln 3]$, la fonction g est continue (car dérivable) et strictement décroissante, $g\left(-\frac{1}{2}\ln 3\right) = \ln 3 - 2 < 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $0 \in [\ln 3 - 2\ ;\ +\infty[$.
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\ln 3]$.
Ainsi, **l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ admet exactement 2 solutions sur $\mathbb{R}$: 0 et $\boldsymbol{\alpha}$.**

D'après la calculatrice, $g(-1{,}5) < 0$ et $g(-1{,}4) < 0$, donc $\boldsymbol{-1{,}5 < \alpha < -1{,}4}$.

4. On peut ainsi déduire cette version complétée du tableau de variations.

x	$-\infty$		α		$-\frac{1}{2}\ln 3$		0		$+\infty$
Variations de g	$+\infty$	↘	0	↘	$g(-\frac{1}{2}\ln 3)$	↗	0	↗	$+\infty$

Ainsi, d'après ce tableau de variations, on a :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$\boldsymbol{\alpha}$		**0**		$+\infty$
Signe de $\boldsymbol{g(x)}$		**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	

Partie B : Etude de la fonction $\boldsymbol{f}$.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$,
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3e^{3x} - (2e^x + (2x+1)e^x) = (3e^{2x} - 2 - 2x - 1)e^x$
$\boldsymbol{f'(x) = (3e^{2x} - 2x - 3)e^x = e^x g(x)}$.

2. Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
On a donc :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
Signe de $g(x)$		+	0	-	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	
Variations de $\boldsymbol{f}$		↗		↘		↗	

3. On remarque que la fonction f' change 2 fois de signe, donc elle n'est pas monotone, donc elle ne peut pas être strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : **QCM sur la géométrie dans l'espace**

1. $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,; y_B - y_A\,; z_B - z_A)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}(4\,; 4\,; -2)$
$\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,; y_C - y_A\,; z_C - z_A)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC}(4\,; -2\,; 4)$
$\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC} = 4 \times 4 + 4 \times (-2) + (-2) \times 4 = 16 - 8 - 8 = 0$
Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, donc le triangle ABC est rectangle en A.
De plus, $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$ unités de longueur.
$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$ unités de longueur
Donc, $AB = AC$, donc le triangle ABC est aussi isocèle en A.
Réponse a.

2. Vérifions que les points $B, C\ et\ D$ vérifient l'équation cartésienne : $4x + y + z - 21 = 0$.
Pour B : $4x_B + y_B + z_B - 21 = 4 \times 3 + 6 + 3 - 21 = 0$
Pour C : $4x_C + y_C + z_C - 21 = 4 \times 3 + 0 + 9 - 21 = 0$
Pour D : $4x_D + y_D + z_D - 21 = 4 \times 8 - 3 - 8 - 21 = 0$
Les trois points qui définissent le plan (BCD) vérifient l'équation cartésienne de la réponse c, donc il s'agit d'une équation cartésienne du plan (BCD).
Réponse c.

3. D'après son équation cartésienne, le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{n}(1\,; -2\,; -2)$.
On note d la droite perpendiculaire au plan (ABC) qui passe par le point D. Elle a donc pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (ABC). $\vec{n}(1\,; -2\,; -2)$ est donc un vecteur directeur de la droite d qui passe par $D(8\,; -3\,; -8)$. La droite d a donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t + 8 \\ y = -2t - 3 \\ z = -2t - 8 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.
Le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est donc le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC). Ainsi, les coordonnées du point H vérifient à la fois l'équation cartésienne du plan (ABC) et la représentation paramétrique de la droite d.
Supposons que $H(3\,; 7\,; 2)$ et montrons qu'alors ce point vérifie les conditions posées précédemment :
Les coordonnées de H doivent vérifier l'équation cartésienne du plan (ABC) :
$x_H - 2y_H - 2z_H + 15 = 3 - 14 - 4 + 15 = 0$ donc les coordonnées du point H vérifient l'équation cartésienne du plan (ABC).
Les coordonnées de H doivent vérifier la représentation paramétrique de la droite d, c'est le cas si, et seulement si, il existe un réel t tel que :

$\begin{cases} x_H = t + 8 \\ y_H = -2t - 3 \\ z_H = -2t - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x_H - 8 = 3 - 8 = -5 \\ t = \frac{y_H+3}{-2} = \frac{7+3}{-2} = -5 \\ t = \frac{(z_H+8)}{-2} = \frac{2+8}{-2} = -5 \end{cases}$ dont t existe donc les coordonnées de H vérifient la représentation paramétrique de la droite d. Ainsi, le point recherché est bien $H(3\,;7\,;2)$.

Réponse b.

4. D'après sa représentation paramétrique, la droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;-1\,;3)$.
La droite (BC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{BC}(x_C - x_B\,;y_C - y_B\,;z_C - z_B)$ $\quad \overrightarrow{BC}(0\,;\,-6\,;6)$
Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires. Ainsi, les droites Δ et (BC) ne sont pas parallèles.

Déterminons une représentation paramétrique de la droite (BC).
La droite (BC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}(0\,;\,-6\,;6)$ et passe par $C(3\,;0\,;9)$.
La droite (BC) a donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 \\ y = -6k \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 6k + 9 \end{cases}$
Les droites (BC) et Δ sont sécantes si, et seulement si, il existe deux réels t et k tels que : $\begin{cases} 5 + t = 3 \\ 3 - t = -6k \\ -1 + 3t = 6k + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ k = \frac{3-t}{-6} = \frac{3-(-2)}{-6} = -\frac{5}{6} \\ 3t - 6k = 10 \end{cases}$
Vérifions la dernière équation : $3 \times (-2) - 6 \times \left(-\frac{5}{6}\right) = -6 + 5 = -1 \neq 10$
La dernière équation n'est pas vérifiée donc t et k n'existent pas donc les droites Δ et (BC) ne sont pas sécantes.
Par conséquent, les droites Δ et (BC) sont non coplanaires.

Réponse d.

5. D'après son équation cartésienne, le plan P a pour vecteur normal le vecteur de coordonnées $(2\,;\,-1\,;2)$ alors que le plan (ABC) a pour vecteur normal le vecteur de coordonnées $(1\,;\,-2\,;\,-2)$. Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires, donc le plan P et le plan (ABC) ne sont pas parallèles.
De plus, $2x_C - y_C + 2z_C - 6 = 2 \times 3 - 0 + 2 \times 9 - 6 = 18 \neq 0$, donc le point C n'appartient pas au plan P donc la seule possibilité est que les plans P et (ABC) soient sécants et que leur droite d'intersection soit la droite (AB).

Réponse b.

Exercice 4 : Suite

Partie A : Etude de la suite $(\boldsymbol{u_n})$

1. $u_0 = 5$
   $u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{11}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{11}{5}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{36}{5} = \mathbf{\frac{18}{5}}$
   $u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{11}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + \frac{11}{\frac{18}{5}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + \frac{55}{18}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{599}{90} = \mathbf{\frac{599}{180}}$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$
   Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{11}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-11}{x^2}\right)$.
   Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $\frac{1}{2} > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 11$.
   Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $x^2 - 11 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 11 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{11}$.
   Ainsi, la fonction f' est positive sur $[\sqrt{11}\ ;\ +\infty[$ donc **la fonction $\boldsymbol{f}$ est croissante sur $[\sqrt{\mathbf{11}}\ ;\ +\infty[$.**

3. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.

   Initialisation : $u_0 = 5$ et $u_1 = \frac{18}{5}$ or $5 \geq \frac{18}{5} \geq \sqrt{11}$ donc $u_0 \geq u_1 \geq \sqrt{11}$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

   Hérédité : Supposons que pour un entier naturel k, $u_k \geq u_{k+1} \geq \sqrt{11}$ et montrons qu'alors $u_{k+1} \geq u_{k+2} \geq \sqrt{11}$.
   D'après l'hypothèse de récurrence, $u_k \geq u_{k+1} \geq \sqrt{11}$.
   La fonction f est croissante sur $[\sqrt{11}\ ;\ +\infty[$ donc elle conserve l'ordre.
   Donc, $f(u_k) \geq f(u_{k+1}) \geq f(\sqrt{11})$.
   Or par définition, $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$
   Et $f(\sqrt{11}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \frac{11}{\sqrt{11}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{11}\times\sqrt{11}}{\sqrt{11}} + \frac{11}{\sqrt{11}}\right) = \frac{1}{2}\left(2 \times \frac{11}{\sqrt{11}}\right) = \frac{11}{\sqrt{11}} = \frac{11\sqrt{11}}{11} = \sqrt{11}$
   Donc, $u_{k+1} \geq u_{k+2} \geq \sqrt{11}$. La propriété est héréditaire.

   Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}}$.

4. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{11}$, donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, **la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est convergente vers $\boldsymbol{a \geq \sqrt{11}}$.**

5. On sait que : la suite (u_n) converge vers $a \geq \sqrt{11}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n avec $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$, et cette fonction f est continue (car dérivable).
   Donc, d'après le théorème du point fixe, la limite a de (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.

Pour tout réel x, $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right) = x \Leftrightarrow x + \frac{11}{x} = 2x \Leftrightarrow \frac{11}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 11 \Leftrightarrow x = \sqrt{11}$ ou $x = -\sqrt{11}$.
Cependant, la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{11}$ donc elle ne peut pas tendre vers $-\sqrt{11}$.
Ainsi, $\boldsymbol{a = \sqrt{11}}$.

Partie B : Application géométrique

1. **a.** Le rectangle R_0 a pour aire 11 et son aire est donnée par $L_0 l_0$
Ainsi, on a $L_0 l_0 = 11 \Leftrightarrow 5 l_0 = 11 \Leftrightarrow \boldsymbol{l_0 = 2,2}$.

   b. Pour tout entier naturel n, le rectangle R_n a pour aire 11 et son aire est donnée par $L_n l_n$. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $L_n l_n = 11 \Leftrightarrow \boldsymbol{l_n = \frac{11}{L_n}}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = \frac{L_n + l_n}{2} = \frac{L_n + \frac{11}{L_n}}{2} = \frac{1}{2}\left(L_n + \frac{11}{L_n}\right)$ et $L_0 = 5 = u_0$. Ainsi, **la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la partie A.**

3. D'après la question A-3., on a : $L_n \geq \sqrt{11}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$\Leftrightarrow \frac{11}{l_n} \geq \sqrt{11} \Leftrightarrow \frac{l_n}{11} \leq \frac{1}{\sqrt{11}} \Leftrightarrow l_n \leq \frac{11}{\sqrt{11}} \Leftrightarrow l_n \leq \frac{11\sqrt{11}}{\sqrt{11}\times\sqrt{11}} \Leftrightarrow l_n \leq \sqrt{11}$.
Donc pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{l_n \leq \sqrt{11} \leq L_n}$.

4. Ainsi, la longueur et la largeur du rectangle R_n vont à long terme se stabiliser toutes les deux autour de $\sqrt{11}$. Ainsi, **le rectangle R_n va progressivement se rapprocher d'un carré.**

5. **a.** Ce script va donner un arrondi à 10^{-6} de L_n et l_n, l'entier naturel n étant rentré par l'utilisateur avant le début du traitement.
Donc, $heron(3)$ va renvoyer un arrondi à 10^{-6} et L_3 et l_3.
Or, $L_3 \approx 3{,}316643$ et $l_3 = \frac{11}{L_3} \approx 3{,}316606$ d'après la calculatrice.
Donc $heron(3)$ renvoie les valeurs 3,316643 et 3,316606.

   b. Ainsi, **le rectangle R_3 aura une longueur d'environ 3,316643 à 10^{-6} près et une largeur d'environ 3,316606 à 10^{-6} près.**