CORRECTION DU BAC – MATHEMATIQUES 2023 – AMERIQUE DU NORD JOUR 2

Exercice 1 : Fonctions

Partie A :

1. Il semble que la fonction dérivée de f soit positive sur $]-\infty\,;0{,}4]$ et sur $[2{,}6\,;\,+\infty[$ et négative sur $[0{,}4\,;2{,}6]$. **La fonction $\boldsymbol{f}$ serait donc croissante sur $]-\infty\,;\mathbf{0,4}]$ et sur $[\mathbf{2,6}\,;\,+\infty[$ et décroissante $[\mathbf{0,4}\,;\mathbf{2,6}]$.**

2. Il semble que la fonction f' soit croissante sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[2\,;\,+\infty[$ et sur $[-1\,;2]$. **Ainsi, la fonction $\boldsymbol{f}$ serait convexe sur $]-\infty\,;\,-\mathbf{1}]$ et sur $[\mathbf{2}\,;\,+\infty[$.**

Partie B :

1. **a.** En $+\infty$, forme indéterminée.
   Pour tout réel x, $f(x)=\left(x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)\right)e^x$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ donc par produit $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

   b. En $-\infty$, forme indéterminée.
   Pour tout réel x, $f(x)=x^2e^x-5xe^x+6e^x$
   $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$ (croissance comparée) ; $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ (croissance comparée) donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5xe^x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}6e^x=0$ donc par somme $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel x,
   $\boldsymbol{f'(x)=(2x-5)e^x+(x^2-5x+6)e^x=(x^2+2x-5x-5+6)e^x=(x^2-3x+1)e^x}$

3. Pour tout réel x, $e^x>0$ donc la fonction f' est du signe de x^2-3x+1 sur $\mathbb{R}$.
   $x\mapsto x^2-3x+1$ est une fonction polynôme de degré 2 avec $a=1$; $b=-3$ et $c=1$
   Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times1=5$
   $\Delta>0$ donc 2 racines.
   $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
   Donc, x^2-3x+1 est du signe de a, soit positif, à l'extérieur des racines.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
Signe de $\boldsymbol{x^2-3x+1}$		**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	
Signe de $\boldsymbol{f'(x)}$		**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	
Variations de $\boldsymbol{f}$	**0**	$\nearrow$	$\boldsymbol{(\sqrt{5}-2)e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}$	$\searrow$	$\boldsymbol{(\sqrt{5}+2)e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Equation de (T) : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ $\quad y = f'(0)x + f(0)$
$f'(0) = (0^2 - 3\times 0 + 1)e^0 = 1\times 1 = 1$
$f(0) = (0^2 - 5\times 0 + 6)e^0 = 6 \times 1 = 6$
Donc, (T) a pour équation : $y = 1x + 6$ $\quad \boldsymbol{y = x + 6}$

5. **a.** Pour tout réel $x, e^x > 0$ donc f'' est du signe de $(x+1)(x-2)$ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ et $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.
On a donc :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de $x+1$		-	0		+		
Signe de $x-2$		-			0	+	
Signe de $(x+1)(x-2)$		+	0	-	0	+	
Signe de $f''(x)$		+	0	-	0	+	

La fonction f'' est positive sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[2\,;\,+\infty[$ donc $\boldsymbol{f}$ **est convexe sur** $]-\infty\,;\,\boldsymbol{-1}]$ **et sur** $[\boldsymbol{2}\,;\,+\infty[$**.**
La fonction f'' est négative sur $[-1\,;2]$ donc $\boldsymbol{f}$ **est concave sur** $[\boldsymbol{-1}\,;\boldsymbol{2}]$**.**

b. La fonction f est concave sur $[-1\,;2]$ donc la courbe représentative de f est en-dessous de ses tangentes sur cet intervalle, et en particulier de (T).
Ainsi, pour tout $x \in [-1\,;2]$, $\boldsymbol{f(x) \leq x + 6}$.

<u>Exercice 2 :</u> Suites

1. On sait qu'entre 2023 et 2024, 15% des sportifs du club A rejoignent le club B, le nombre de sportifs du club A baisse donc de 15%, il est donc multiplié par 0,85. De plus, 10% des sportifs du club B rejoignent le club A, le nombre de sportifs du club B baisse donc de 10%, il est donc multiplié par 0,9.
   Ainsi, on calcule comme cela a_1 et b_1 qui sont respectivement le nombre de sportifs du club A et B en 2024.
   $a_1 = 0{,}85a_0 + 0{,}1b_0 = 0{,}85 \times 1700 + 0{,}1 \times 1300 = 1575.$
   $b_1 = 0{,}9b_0 + 0{,}15a_0 = 0{,}9 \times 1300 + 0{,}15 \times 1700 = 1425.$
   Ainsi, en 2024, il y aura 1575 sportifs au club A et 1425 sportifs au club B.

2. On sait qu'aucun sportif ne quitte le groupe de 3000 sportifs pendant l'étude. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{a_n + b_n = 3000}$.

3. Chaque année, le phénomène décrit en question 1 se reproduit.
   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 0{,}1b_n = 0{,}75\, a_n + 0{,}1a_n + 0{,}1b_n = 0{,}75a_n + 0{,}1(a_n + b_n)$
   $\boldsymbol{a_{n+1} = 0{,}75a_n + 0{,}1 \times 3000 = 0{,}75a_n + 300.}$

4. **a.** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$

   <u>Initialisation :</u> $a_0 = 1700$ et $a_1 = 1575$ or $1200 \leq 1575 \leq 1700 \leq 1700$ donc $1200 \leq a_1 \leq a_0 \leq 1700$ La propriété est vraie pour $n = 0$.

   <u>Hérédité :</u> Supposons que pout un entier naturel k, $1200 \leq a_{k+1} \leq a_k \leq 1700$ et montrons qu'alors $1200 \leq a_{k+2} \leq a_{k+1} \leq 1700$.
   D'après l'hypothèse de récurrence, $1200 \leq a_{k+1} \leq a_k \leq 1700$
   On multiplie par 0,75 > 0 : $900 \leq 0{,}75a_{k+1} \leq 0{,}75a_k \leq 1275$.
   On ajoute 300 : $1200 \leq 0{,}75a_{k+1} + 300 \leq 0{,}75a_k + 300 \leq 1575$
   Or par définition, $0{,}75a_{k+1} + 300 = a_{k+2}$; $0{,}75a_k + 300 = a_{k+1}$ et $1575 \leq 1700$
   On a donc : $1200 \leq a_{k+2} \leq a_{k+1} \leq 1575 \leq 1700$
   Soit : $1200 \leq a_{k+2} \leq a_{k+1} \leq 1700$ La propriété est héréditaire.

   <u>Conclusion :</u> La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700}$.

   b. Pour tout entier naturel n, $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n$, donc, la suite (a_n) est décroissante et minorée par 1200, donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, **la suite $(\boldsymbol{a_n})$ est convergente vers $\boldsymbol{l \geq 1200}$.**

5. **a.** Pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = a_{n+1} - 1200 = 0{,}75a_n + 300 - 1200 = 0{,}75a_n + 900 = 0{,}75(a_n - 1200) = 0{,}75v_n$.
Donc, **la suite $(\boldsymbol{v_n})$ est une suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme $\boldsymbol{v_0 = a_0 - 1200 = 1700 - 1200 = 500}$**

b. Donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ $\quad \boldsymbol{v_n = 500 \times 0{,}75^n}$**.**

c. Pour tout entier naturel $n, v_n = a_n - 1200 \Leftrightarrow a_n = v_n + 1200$
Donc, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{a_n = 500 \times 0{,}75^n + 1200}$**.**

6. **a.** $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^n$ car 0 < 0,75 < 1 donc par produit et par somme, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1200}$**.**

b. Ainsi, **à long terme, le nombre de sportifs présents au club A va se stabiliser autour de 1200.**

7. **a.** **Ligne 4 : while A >= 1280 :** **Ligne 6 : A = 0,75*A + 300** **Ligne 7 : n**

b. On cherche le plus petit entier naturel n tel que $a_n < 1280$
$\Leftrightarrow 500 \times 0{,}75^n + 1200 < 1280 \Leftrightarrow 500 \times 0{,}75^n < 80 \Leftrightarrow 0{,}75^n < 0{,}16$
$\Leftrightarrow \ln(0{,}75^n) < \ln 0{,}16$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$
$\Leftrightarrow n \ln 0{,}75 < \ln 0{,}16 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}16}{\ln 0{,}75}$ car $0{,}75 < 1$ donc $\ln 0{,}75 < \ln 1$ soit $\ln 0{,}75 < 0$
Or, $\frac{\ln 0{,}16}{\ln 0{,}75} \approx 6{,}37$ donc $n \geq 7$. Ainsi, le plus petit entier naturel n tel que $a_n < 1280$ est 7. **Donc, l'appel de la fonction seuil renvoie 7.**

<u>Exercice 3 :</u> Géométrie dans l'espace

1. **a.** $\overrightarrow{EF}(x_F - x_E\,; y_F - y_E\,; z_F - z_E)$ $\qquad$ $\overrightarrow{\boldsymbol{EF}}(\mathbf{-4\,; 4\,; 2})$
$\overrightarrow{FG}(x_G - x_F\,; y_G - y_F\,; z_G - z_F)$ $\qquad$ $\overrightarrow{\boldsymbol{FG}}(\mathbf{4\,; 0\,; -4})$

b. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc **les points $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ ne sont pas alignés**.

2. **a.** La droite (FG) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{FG}(4\,; 0\,; -4)$ et passe par $F(-1\,; 2\,; 1)$ donc la droite (FG) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} \boldsymbol{x = 4t - 1} \\ \boldsymbol{y = 2} \\ \boldsymbol{z = 1 - 4t} \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$

b. Il faut montrer que le point H appartient à la droite (FG) et que les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux (car $\overrightarrow{FG}$ est un vecteur directeur de la droite (FG).)
Le point H appartient à la droite (FG) si, et seulement si il existe un réel t tel que :
$\begin{cases} x_H = 4t - 1 \\ y_H = 2 \\ z_H = 1 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4t - 1 \\ 2 = 2 \\ -2 = 1 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0{,}75 \\ 2 = 2 \\ t = 0{,}75 \end{cases}$ donc t existe donc le point H appartient à la droite (FG).
De plus, $\overrightarrow{HE}(x_E - x_H\,; y_E - y_H\,; z_E - z_H)$ $\qquad$ $\overrightarrow{HE}(1\,; -4\,; 1)$
Donc, $\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{FG} = 1 \times 4 + (-4) \times 0 + 1 \times (-4) = 4 + 0 - 4 = 0$
Donc, les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux donc **le point $\boldsymbol{H}$ est bien le projeté orthogonal du point $\boldsymbol{E}$ sur la droite $(\boldsymbol{FG})$.**

c. Le point H est le projeté orthogonal du point E sur la droite (FG) donc $[EH]$ est la hauteur du triangle EFG relative à la base $[FG]$.
Donc, $A_{EFG} = \frac{HE \times FG}{2}$
$HE = \left|\left|\overrightarrow{HE}\right|\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2}.$
$FG = \left|\left|\overrightarrow{FG}\right|\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 16} = 4\sqrt{2}$
Donc, $\boldsymbol{A_{EFG}} = \frac{\mathbf{3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}}{\mathbf{2}} = \mathbf{12}\boldsymbol{cm}^2$**.**

3. **a.** $\vec{n}.\overrightarrow{FG} = 2 \times 4 + 1 \times 0 + 2 \times (-4) = 8 + 0 - 8 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux.
$\vec{n}.\overrightarrow{EF} = 2 \times (-4) + 1 \times 4 + 2 \times 2 = -8 + 4 + 4 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux.
Ainsi, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (EFG), donc **le vecteur $\vec{\boldsymbol{n}}$ est normal au plan $(\boldsymbol{EFG})$.**

b. Le plan (EFG) a pour vecteur directeur $\vec{n}(2\,; 1\,; 2)$. Le plan (EFG) a donc pour équation cartésienne $2x + y + 2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, $F(-1\,;2\,;1) \in (EFG)$ donc $2x_F + y_F + 2z_F + d = 0 \Leftrightarrow 2 \times (-1) + 2 + 2 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow -2 + 2 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$.
Donc, **le plan (EFG) a pour équation cartésienne $\mathbf{2x + y + 2z - 2 = 0}$**

c. La droite (d) est orthogonale au plan (EFG) donc elle a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (EFG). $\vec{n}$ est donc un vecteur directeur de la droite (d) qui passe par le point $D(3\,;1\,;5)$. La droite (d) a donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 3 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 1 + t} \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R} \\ \boldsymbol{z = 5 + 2t} \end{cases}$$

d. Le point K est le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG), donc il s'agit du point d'intersection de la droite (d) et du plan (EFG). Ses coordonnées vérifient donc :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z - 2 = 0 \\ x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3 + 2t) + 1 + t + 2(5 + 2t) - 2 = 0 \\ x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 + 9t = 0 \\ x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t = -\frac{5}{3} \\ x = 3 + 2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{-1}{3} \\ y = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} \\ z = 5 + 2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} \end{cases} \text{ donc } \boldsymbol{K\left(-\frac{1}{3}\,;\,-\frac{2}{3}\,;\frac{5}{3}\right)}.$$

4. a. $\overrightarrow{DK}(x_K - x_D\,; y_K - y_D\,; z_K - z_D)$ $\quad \overrightarrow{DK}\left(-\frac{10}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{10}{3}\right)$

Donc, $\boldsymbol{DK} = \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{DK}}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{9}} = \frac{15}{3} = \boldsymbol{5cm}$.

b. Le point K est le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG) donc $[DK]$ est la hauteur du tétraèdre $DEFG$ relative à la base EFG.
Donc, $\boldsymbol{V_{DEFG} = \frac{1}{3} \times A_{EFG} \times DK = \frac{1}{3} \times 12 \times 5 = 20\ cm^3}$**.**

<u>Exercice 4 :</u> QCM sur les fonctions, les suites et les probabilités

1. En $+\infty$, $f(x) = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+1} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ donc par produit et par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissance comparée) donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Réponse b.

2. La fonction h est continue sur $[-2\,;4]$ et en particulier sur $[1\,;3]$,
$h(1) = 4\,; h(3) = -1$ et $4 > 1 > -1$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $a \in [1\,;3]$ tel que $h(a) = 1$.

Réponse c.

3. On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$. Ainsi, la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge.

Réponse b.

4. On note Y la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur. Y prend les valeurs : 8 ; -1 ; -4
Comme le dé est équilibré, on a : $P(Y = 8) = \frac{1}{6}$; $P(Y = -1) = \frac{1}{2}$ (3 nombres pairs parmi 6 nombres) et $P(Y = -4) = \frac{1}{3}$ (il ne reste que 2 nombres possibles parmi 6).
On peut donc calculer l'espérance de Y.
$E(Y) = 8 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{2} + (-4) \times \frac{1}{3} = -0{,}5$€. Ainsi, en moyenne, le joueur perd 0,5€.

Réponse d.

5. $P(X = 0) = \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3$ donc $\binom{3}{0} p^0 (1-p)^3 = \frac{1}{125} \Leftrightarrow (1-p)^3 = \frac{1}{125} \Leftrightarrow 1 - p = \frac{1}{5} \Leftrightarrow p = \frac{4}{5}$.

Réponse c.