BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES
JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Dès que le sujet est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x)$.

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ et, en remarquant que $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, justifier que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = -4x\ln(x)$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\ +\infty[$ et que $\alpha \in [1\,; \mathrm{e}]$.

On admet, dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0\,; 1]$.

5. On donne la fonction ci-dessous écrite en Python. L'instruction *from lycee import**permet d'accéder à la fonction ln.

```
from lycee import *

def f(x) :
    return 1+x**2-2*x**2*ln(x)

def dichotomie(p) :
    a = 1
    b = 2.7
    while b-a > 10**(-p) :
        if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
            b = (a+b)/2
        else:
            a = (a+b)/2
    return (a,b)
```

On écrit dans la console d'exécution :

```
>>> dichotomie(1)
```

Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l'instruction précédente ? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination).

Proposition A :	(1.75, 1.9031250000000002)
Proposition B :	(1.85, 1.9031250000000002)
Proposition C :	(2.75, 2.9031250000000002)
Proposition D :	(2.85, 2.9031250000000002)

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, par $g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$.

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note $g\,'$ sa fonction dérivée.

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,; +\infty[$, $g\,'(x) = \frac{f(x)}{x(1+x^2)^2}$.

2. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $x = \alpha$.

On admet que $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$.

3. On note T_1 la tangente à C_g au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à C_g au point d'abscisse α.
Déterminer, en fonction de α, les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et T_α.

EXERCICE 2 (5 points)

1. Entre 1998 et 2020, en France, 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants.

a. Avec une précision de 0,1%, calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.

b. Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1%. On considère alors que ce pourcentage est négligeable.

On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant.
On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.

On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double.
La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à 0,984 et celle d'un accouchement double est alors égale à $0{,}016$.

Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.

2. On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements.
On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

a. Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

b. Par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette maternité, parmi les naissances doubles, on estime qu'il y a 30% de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70% de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).
Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à $0{,}49$ et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à $0{,}51$.
Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.

On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

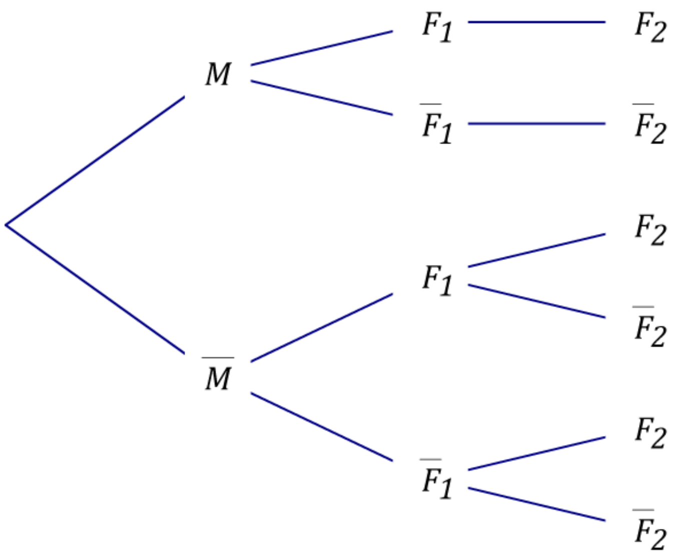
- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

On notera $P(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\bar{A}$ l'évènement contraire de A.

a. Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-dessous.

b. Montrer que la probabilité que les deux nouveau-nés soient des filles est $0{,}31507$.

c. Les deux nouveau-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.



EXERCICE 3 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(0 ; 4 ; 16)$, $B(0 ; 4 ; -10)$, $C(4 ; -8 ; 0)$ et $K(0 ; 4 ; 3)$.

On définit la sphère $\mathcal{S}$ de centre K et de rayon 13 comme l'ensemble des points M tels que $KM = 13$.

1.

a. Vérifier que le point C appartient à la sphère $\mathcal{S}$.

b. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

2.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. On admet que la sphère $\mathcal{S}$ coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un ayant une abscisse positive et l'autre une abscisse négative. On note D celui qui a une abscisse positive.

a. Montrer que le point D a pour coordonnées $(12 ;\ 0 ;\ 0\ )$.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).

c. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).

4. Calculer une valeur approchée, à l'unité de volume près, du volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle la formule du volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times \mathcal{h}$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et $\mathcal{h}$ la hauteur associée.

EXERCICE 4 (5 points)

PARTIE A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1 - x).$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.
Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

PARTIE B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022 + n$. Ainsi $P_0 = 3$.
Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du 19e siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.

a. Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Déterminer la limite de P_n.

2. Dans cette question $b = 0{,}2$.

a. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0{,}1 \times P_n$.
Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$.

b. Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.