CORRECTION DU BAC : SPECIALITE MATHEMATIQUES – ASIE 2023
JOUR 1

Exercice 1 : Suites

Partie A :

1. **a.** $u_1 = 0{,}9u_0 + 60 = 0{,}9 \times 400 + 60 = \mathbf{420}$
$u_2 = 0{,}9u_1 + 60 = 0{,}9 \times 420 + 60 = \mathbf{438}$

b. Il semble que la suite (u_n) est **croissante**.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$.

Initialisation : $u_0 = 400$ d'après la question 1-a-, $u_1 = 420$ or $0 \leq 400 \leq 420 \leq 600$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 600$. La propriété est donc vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier naturel k, $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 600$ et montrons que $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 600$.
D'après, l'hypothèse de récurrence : $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 600$
On multiplie par 0,9 > 0, on a alors : $0 \leq 0{,}9u_k \leq 0{,}9u_{k+1} \leq 540$
On ajoute 60, on a alors : $60 \leq 0{,}9u_k + 60 \leq 0{,}9u_{k+1} + 60 \leq 600$
Or, par définition, $0{,}9u_k + 60 = u_{k+1}$ et $0{,}9u_{k+1} + 60 = u_{k+2}$ et $0 \leq 60$
On a donc $0 \leq 60 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 600$ soit $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 600$
La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600}$.

3. **a.** D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 600, donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, **la suite (u_n) est convergente vers $l \leq 600$**.

b. On remarque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0{,}9x + 60$
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine.
La suite (u_n) est convergente vers $l \leq 600$.
Donc, d'après le théorème du point fixe, la limite l de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.

On résout l'équation $f(x) = x$.
Pour tout réel x, $f(x) = x \Leftrightarrow 0{,}9x + 60 = x \Leftrightarrow 0{,}1x = 60 \Leftrightarrow x = 600 \quad S = \{600\}$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \mathbf{600}$.

4. Cette fonction en langage Python renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n > seuil$.
Ainsi, l'instruction $mystere(500)$ renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 500$.
D'après la calculatrice, $u_6 < 500$ et $u_7 > 500$.
Ainsi, le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 500$ est 7. Ainsi, en tapant dans la console de Python $mystere(500)$ renvoie la valeur 7.

Partie B :

On va chercher à modéliser de manière discrète grâce à la suite (v_n) le nombre d'arbres dans le verger au bout de n années. v_n sera alors le nombre d'arbres dans le verger au bout de n années. Or, on sait que chaque année, l'arboriculteur revend 10% des arbres de son verger. Le nombre d'arbres dans le verger va être multiplié par 0,9. De plus, il replante ensuite 60 nouveaux arbres. En 2023 (année de départ, donc $n = 0$), il y a 400 arbres dans le verger.

On peut donc en déduire que : pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}9v_n + 60$ avec $v_0 = 400$.
Ainsi, on peut en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$.

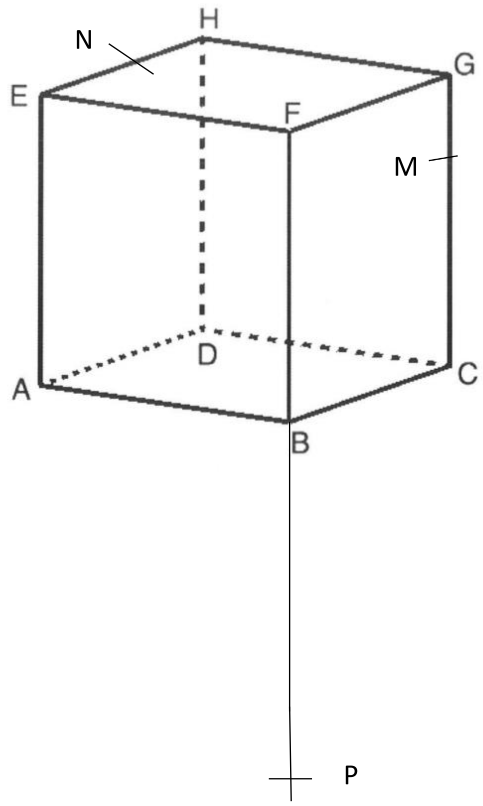
On modélisera donc le nombre d'arbres dans le verger par la suite (u_n) étudier dans la partie A.
L'arboriculteur peut planter au maximum 500 arbres. On cherche donc s'il existe un entier naturel n tel que $u_n > 500$. Or, d'après la question A-4-, 7 est le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 500$.

Ainsi, les termes de la suite (u_n) vont dépasser 500, ainsi, avec cette modélisation, le nombre d'arbres dans le verger va dépasser 500, donc **l'arboriculteur va être confronté à un problème de place.**

<u>Exercice 2 :</u> Géométrie dans l'espace

1. $\overrightarrow{MN}(x_N - x_M\,; y_N - y_M; z_N - z_M)$ $\boldsymbol{\overrightarrow{MN}(-1\,;\ -0,5\,; 0,25)}$
$\overrightarrow{MP}(x_P - x_M\,; y_P - y_M\,; z_P - z_M)$ $\boldsymbol{\overrightarrow{MP}(0\,;\ -1\,;\ -2)}$

2.



3. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas colinéaires donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc **les points $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{P}$ ne sont pas alignés**.

4. **a.** $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{MP} = -1 \times 0 + (-0{,}5) \times (-1) + 0{,}25 \times (-2) = 0 + 0{,}5 - 0{,}5 = \mathbf{0}$

b. D'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux donc les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires, donc le triangle MNP est rectangle en M.
Ainsi, $A_{MNP} = \frac{MN \times MP}{2}$
Or, $MN = \|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-0{,}5)^2 + 0{,}25^2} = \sqrt{\frac{21}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4}$ unités de longueur
Et $MP = \|\overrightarrow{MP}\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ unités de longueur
Donc, $A_{MNP} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{4} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{105}}{8}$ unités d'aire.
L'aire du triangle $\boldsymbol{MNP}$ est donc de $\boldsymbol{\frac{\sqrt{105}}{8}}$ unités d'aire.

5. **a.** Calculons $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{MN}$ et $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{MP}$.
$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{MN} = 5 \times (-1) + (-8) \times (-0{,}5) + 4 \times 0{,}25 = -5 + 4 + 1 = 0$

$\vec{n}\,.\overrightarrow{MP} = 5 \times 0 + (-8) \times (-1) + 4 \times (-2) = 0 + 8 - 8 = 0$

Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{MN}$ et au vecteur $\overrightarrow{MP}$, deux vecteurs non colinéaires du plan (MNP). Ainsi, **le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (MNP)**.

b. Le vecteur $\vec{n}(5\,;\,-8\,;4)$ est normal au plan (MNP). Le plan (MNP) a donc pour équation cartésienne : $5x - 8y + 4z + d = 0$ où d est un réel.
De plus, le point $N\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$ appartient au plan (MNP) donc :
$5x_M - 8y_M + 4z_M + d = 0 \Leftrightarrow 5 \times 0 - 8 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow 0 + d \Leftrightarrow d = 0.$
Ainsi, le plan (MNP) a pour équation cartésienne : $\mathbf{5x - 8y + 4z = 0.}$

6. La droite d est orthogonale au plan (MNP), donc elle a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (MNP). Le vecteur $\vec{n}(5\,;\,-8\,;4)$ est donc un vecteur directeur de la droite d qui passe par $F(1\,;0\,;1)$.

La droite d a donc pour représentation paramétrique : $\boldsymbol{\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -8t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 4t \end{cases}}$

7. La droite d est orthogonale au plan (MNP) et passe par le point F. Ainsi, le projeté orthogonal L du point F sur le plan (MNP) est le point d'intersection de la droite d et du plan (MNP). Les coordonnées de L vérifient donc :

$$\begin{cases} 5x - 8y + 4z = 0 \\ x = 1 + 5t \\ y = -8t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(1 + 5t) - 8(-8t) + 4(1 + 4t) = 0 \\ x = 1 + 5t \\ y = -8t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5 + 25t + 64t + 4 + 16t = 0 \\ x = 1 + 5t \\ y = -8t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 105t + 9 = 0 \\ x = 1 + 5t \\ y = -8t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t = -\frac{3}{35} \\ x = 1 + 5t = 1 + 5 \times \frac{-3}{35} = \frac{4}{7} \\ y = -8t = -8 \times \frac{-3}{35} = \frac{24}{35} \\ z = 1 + 4t = 1 + 4 \times \frac{-3}{35} = \frac{23}{35} \end{cases}$$

On a donc bien : $\boldsymbol{L\left(\frac{4}{7}\,;\frac{24}{35};\frac{23}{35}\right)}$.

8. $\overrightarrow{FL}(x_L - x_F\,; y_L - y_F\,; z_L - z_F) \qquad \overrightarrow{FL}\left(-\frac{3}{7};\frac{24}{35}\,;\,-\frac{12}{35}\right)$

Donc, $\quad FL = \|\overrightarrow{FL}\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{24}{35}\right)^2 + \left(-\frac{12}{35}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{35}} = \frac{\sqrt{3\times 9}}{\sqrt{35}} = \frac{3\sqrt{3}\times\sqrt{35}}{\sqrt{35}\times\sqrt{35}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{105}}{35}}$ **unités de longueur.**

Le point L est le projeté orthogonal de F sur le plan (MNP), donc $[FL]$ est la hauteur du tétraèdre $FMNP$ relative à la base MNP.

Ainsi, $V_{FMNP} = \frac{1}{3} \times A_{MNP} \times FL = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{105}}{8} \times \frac{3\sqrt{105}}{35} = \frac{3\times 105}{840} = \frac{3}{8}$ unités de volume.

Le volume du tétraèdre $FMNP$ est donc de $\frac{3}{8}$ unités de longueur.

<u>Exercice 3 :</u> Fonctions

Partie 1 : Conjectures graphiques

Pour $k = 1$, il semble n'y avoir aucune solution à l'équation $\ln x = kx$. En effet, la courbe d'équation $y = \ln x$ et la droite d'équation $y = x$ ne semble pas s'intercepter.

Pour $k = 0,2$, il semble que l'équation $\ln x = kx$ ait deux solutions. En effet, la courbe d'équation $y = \ln x$ et la droite d'équation $y = 0,2x$ semblent s'intercepter deux fois.

Partie 2 : Etude du cas $k = 1$

a. La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$,
Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}}$.

b. Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[, x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[, 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$
On a donc :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $1 - x$		+	0	-	
Signe de $f'(x)$	|	+	0	-	
Variations de f	|	$\nearrow$	**-1**	$\searrow$	

$f(1) = \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1$

c. Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[, \ln x = x \Leftrightarrow \ln x - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
Or, la fonction f admet pour maximum -1 sur $]0\ ;\ +\infty[$, or $-1 < 0$ donc l'équation $f(x) = x$ n'admet aucune solution sur $]0\ ;\ +\infty[$ et par conséquent, **l'équation $\ln x = x$ n'admet aucune solution sur $]0\ ;\ +\infty[$.**

Partie 3 : Etude du cas général

a. On étudie la situation en fonction du signe de $g\left(\frac{1}{k}\right)$.
<u>1er cas :</u> $g\left(\frac{1}{k}\right) < 0$, alors la fonction g admet pour maximum $g\left(\frac{1}{k}\right)$ qui est négatif, donc **l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $]0\ ;\ +\infty[$.**
<u>2ème cas :</u> $g\left(\frac{1}{k}\right) = 0$, alors la fonction g admet pour maximum 0 en $x = \frac{1}{k}$. Comme la fonction g est strictement croissante sur $]0\ ;\frac{1}{k}[$, alors pour tout $x \in]0\ ;\frac{1}{k}[, g(x) < g\left(\frac{1}{k}\right)$. De plus, la fonction g est strictement décroissante sur $]\frac{1}{k}\ ;\ +\infty[$ donc pour tout

$x \in]\frac{1}{k}\ ;\ +\infty[, g\left(\frac{1}{k}\right) > g(x)$. Ainsi, **l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ admet pour unique solution sur $]\mathbf{0}\ ;\ +\infty[\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}}$.**

<u>3ème cas :</u> $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$

Sur $]0\,;\frac{1}{k}]$, la fonction g est continue comme somme de la fonction logarithme népérien et d'une fonction linéaire et strictement croissante.

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$, $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$ et $0 \in]-\infty\,; g(\frac{1}{k})\,]$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;\frac{1}{k}]$.

Sur $[\frac{1}{k}\ ;\ +\infty[$, la fonction g est continue et strictement décroissante.

$g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $0 \in [g\left(\frac{1}{k}\right);\ +\infty[$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[\frac{1}{k}\ ;\ +\infty[$.

Ainsi, **l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ admet exactement deux solutions sur $]\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$.**

b. Pour tout réel k strictement positif, $g\left(\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{1}{k}\right) - k\frac{1}{k} = \ln\left(\frac{1}{k}\right) - 1 = \boldsymbol{-\ln(k) - 1}$.

c. Pour tout réel $k > 0$, $\boldsymbol{g\left(\frac{1}{k}\right) > 0 \Leftrightarrow -\ln(k) - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln k < -1}$

d. D'après la question 3-a-, l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions si, et seulement si $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$ donc si, et seulement si $\ln k < -1 \Leftrightarrow 0 < k < e^{-1}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions si, et seulement si $k \in]0\,; e^{-1}[$. Or pour tous réels $k > 0$ et x, $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - kx = 0 \Leftrightarrow \ln x = kx$.

Ainsi, **l'équation $\boldsymbol{\ln x = kx}$ admet exactement deux solutions si, et seulement $\boldsymbol{k \in]0\,; e^{-1}[}$.**

e. D'après la question précédente, **si $\boldsymbol{k \in]0\,; e^{-1}[}$, alors l'équation $\boldsymbol{\ln x = kx}$ admet exactement deux solutions**.

De plus, d'après la question 3-a-, l'équation $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = kx$ admet exactement une solution si, et seulement si $g\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \Leftrightarrow -\ln(k) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln k = -1 \Leftrightarrow k = e^{-1}$, ainsi, **si $\boldsymbol{k = e^{-1}}$, alors l'équation $\boldsymbol{\ln x = kx}$ admet exactement une solution.**

Enfin, d'après la question 3-a-, l'équation $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = kx$ n'admet aucune solution si, et seulement si $g\left(\frac{1}{k}\right) < 0 \Leftrightarrow -\ln(k) - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln k > -1\ \Leftrightarrow k > e^{-1}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, **si $\boldsymbol{k \in]e^{-1}\ ;\ +\infty[}$, alors l'équation $\boldsymbol{\ln x = kx}$ n'admet aucune solution**.

<u>Exercice 4 :</u> QCM sur les probabilités

D'après l'énoncé : $P(R) = \frac{1}{15}$ (1 bille rouge parmi 15 boules), $P(B) = \frac{4}{15}$ (4 billes bleues parmi 15) et $P(V) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ (10 billes vertes parmi 15).

De plus, on note I l'événement « la bille porte un nombre impair ». Ainsi, $P(I) = \frac{8}{15}$ car il y a 8 nombres impairs entre 1 et 15.

1. On calcule $P(B \cup \bar{I})$.
   $P(B \cup \bar{I}) = P(B) + P(\bar{I}) - P(B \cap \bar{I}) = P(B) + 1 - P(I) - P(B \cap \bar{I})$
   $P(B \cap \bar{I}) = P(B) \times P_{\bar{I}}(B)$.
   Or, les billes sont numérotées de 2 à 5, soit 2 nombres pairs possibles sur 4 nombres possibles, donc $P_{\bar{I}}(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
   Ainsi, $P(B \cap \bar{I}) = \frac{4}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{15}$
   Donc $P(B \cup \bar{I}) = \frac{4}{15} + 1 - \frac{8}{15} - \frac{2}{15} = \frac{4}{15} + \frac{7}{15} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15}$.
   Ainsi, la probabilité que la bille tirée soit bleue ou porte un numéro impair est de $\frac{9}{15}$.
   Réponse b.

2. On sait que sur les 15 billes, 10 sont vertes. Sur ces 10 billes, une seule porte le numéro 7. Ainsi, la probabilité que la bille porte le numéro 7 sachant qu'elle est verte est de $\frac{1}{10}$.
   Réponse c.

3. Soit x la somme remportée par le joueur en jouant. Le gain algébrique est alors égal à $x - 10$ puisque le joueur doit payer 10€. On cherche dans quelles situations le gain algébrique est de 5€ soit $x - 10 = 5 \Leftrightarrow x = 15$.
   Ainsi, deux situations sont possibles. La première est la situation dans laquelle le joueur a tiré la bille verte numérotée 15, il gagne donc 15€. La seconde est la situation dans laquelle le joueur a tiré la bille bleue numérotée 5. Il remporte donc trois fois le numéro de la bille, soit 15€.
   Ainsi, deux billes correspondent à la situation. Ainsi, $P(G = 5) = \frac{2}{15}$ car toutes les billes ont la même probabilité d'être tirées. **Réponse b.**

4. On sait que la bille tirée est rouge. Ainsi, le joueur ne remporte rien, donc $G = -10$. Il est donc impossible que $G = 0$. Donc, c'est un événement impossible. On en déduit que : $P_R(G = 0) = 0$ **Réponse a.**

5. On sait que le gain algébrique est de -4€. On note y la somme alors remportée par le joueur. Le gain algébrique étant égal à $y - 10$ d'après la question 3, on a l'équation : $y - 10 = -4 \Leftrightarrow y = 6$. Le joueur remporte donc 6€.
   Ainsi, deux situations sont possibles. La première est la situation dans laquelle le joueur tire la bille verte numérotée 6. Il remporte alors 6€. La seconde est la situation dans

laquelle le joueur tire la bille bleue numérotée 2, il gagne alors le triple du numéro de la bille, soit 6€
Ainsi, deux billes correspondent à la situation, dont l'une qui est verte. La probabilité d'avoir une bille verte sachant que $G = -4$ est donc de $\frac{1}{2}$. Donc, $P_{G=-4}(V) = \frac{1}{2}$.

Réponse c.