CORRECTION DU BAC : SUJET DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

CENTRES ETRANGERS AFRIQUE 2023 – JOUR 1

Exercice 1 : QCM sur les thèmes : fonctions, suites, algorithmique, probabilités

1. La limite de u_n en $+\infty$ est une forme indéterminée

Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{5^n\left(\frac{3}{5^n}+1\right)} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \dfrac{\frac{1}{2^n}+1}{\frac{3}{5^n}+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$ donc par quotient et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2^n}+1\right) = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ car $5 > 1$ donc par quotient et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5^n}+1\right) = 1$

Donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2^n}+1}{\frac{3}{5^n}+1} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{2}{5} < 1$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc la suite u_n converge vers 0. **Réponse c**

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme produit de la fonction carré et de la fonction logarithme népérien.

Donc pour tout réel x, $f'(x) = 2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln(x) + x = x(2\ln x + 1)$

Réponse b

3. Le tableau de variations de la fonction h nous permet d'établir son tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $h(x)$		-	0	+	

On sait que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction h est la dérivée de la fonction H et on sait que $H(0) = 0$. On peut donc en déduire les variations de la fonction H :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Variations de H		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

D'après ce tableau de variations, on peut déduire que la fonction H est positive sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ **Réponse a**

4. Pour trouver une valeur approchée de α, on va progressivement réduire l'intervalle de recherche. Ainsi, tant que cette valeur n'est pas trouvée, on va prendre le milieu de l'intervalle et regarder si sa valeur est inférieure ou supérieure à α. La fonction f étant croissante sur $[a\,;b]$, elle conserve donc l'ordre. Donc, le milieu m de l'intervalle $[a\,;b]$ est inférieur à α si et seulement si $f(m) < f(\alpha)$, soit $f(m) < 0$. Dans ce cas précis, le réel α est élément de l'intervalle $[m\,;b]$. On va donc donner à a la valeur m pour réduire l'intervalle. Dans le contraire, c'est b qui prendra la valeur m. Le seul algorithme qui procède à la méthode décrite ci-dessus est celui de la réponse d.

Réponse d

5. Sur les 10 boules présentes dans l'urne, 7 sont bleues. Les autres boules étant vertes, il y a 3 boules vertes dans l'urne. La probabilité d'avoir une boule verte est donc de $\frac{3}{10}$.
Tirer une boule est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « la boule est verte » de probabilité $\frac{3}{10}$.
On répète 3 fois cette épreuve de façon identique et indépendante (on effectue des tirages avec remise). On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}3$.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le nombre de boules vertes tirées). X suit donc la loi binomiale $B\left(3\,;\frac{3}{10}\right)$.
On calcule la probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes, soit $P(X = 2)$.
$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right) = \binom{3}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$ **Réponse d**

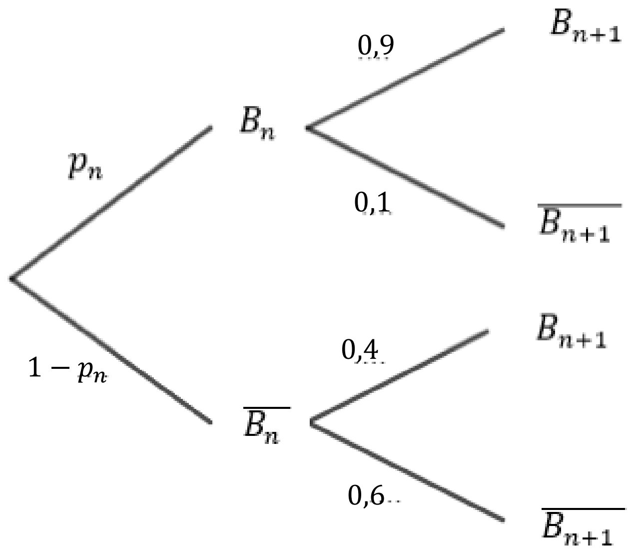
Exercice 2 : Probabilités

Partie A :

D'après l'énoncé, pour tout entier naturel n, $P_{B_n}(B_{n+1}) = 0{,}9$ et $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 0{,}4$

1. Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état, donc la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est de 0,9. Ainsi, $\boldsymbol{p_1 = 0,9.}$
D'après la formule des probabilités totales, $p_2 = P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap \overline{B_1})$
$p_2 = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P\overline{B_1} \times P_{\overline{B_1}}(B_2) = p_1 \times P_{B_1}(B_2) + (1 - p_1) \times P_{\overline{B_1}}(B_2)$
$\boldsymbol{p_2 = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,85}$

2.



3. D'après la formule des probabilités totales,

$p_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} \cap B_n) + P(B_{n+1} \cap \overline{B_n})$

$p_{n+1} = P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \times P(\overline{B_n}) = 0{,}9p_n + 0{,}4(1 - p_n)$

$\boldsymbol{p_{n+1} = 0,9p_n + 0,4 - 0,4p_n = 0,5p_n + 0,4}$

4. a. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geq 0{,}8$.

<u>Initialisation :</u> $p_0 = 1$ or $1 \geq 0{,}8$ donc $p_0 \geq 0{,}8$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité :</u> Supposons que pour un entier naturel k, $p_k \geq 0{,}8$ et montrons qu'alors $p_{k+1} \geq 0{,}8$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $p_k \geq 0{,}8$

On multiplie par $0{,}5 > 0$, on a : $0{,}5p_k \geq 0{,}4$

On ajoute 0,4, on a : $0{,}5p_k + 0{,}4 \geq 0{,}8$

Or, par définition, $0{,}5p_k + 0{,}4 = p_{k+1}$

Donc, on a : $p_{k+1} \geq 0{,}8$. La propriété est héréditaire.

<u>Conclusion :</u> La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{p_n \geq 0,8}$.

b. L'entreprise peut dire que, **chaque lundi, au moins 80% des trottinettes sont en bon état.**

5. a. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5p_n + 0{,}4 - 0{,}8 = 0{,}5p_n - 0{,}4$

$u_{n+1} = 0{,}5(p_n - 0{,}8) = 0{,}5u_n$.

Donc, **la suite (u_n) est une suite géométrique de raison q = 0,5 et de premier terme $\boldsymbol{u_0 = p_0 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2}$.**

b. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$ $\boldsymbol{u_n = 0,2 \times 0,5^n}$

Or, pour tout entier naturel n, $u_n = p_n - 0{,}8 \Leftrightarrow p_n = u_n + 0{,}8$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{p_n = 0,2 \times 0,5^n + 0,8}$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ car $0 < 0{,}5 < 1$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}2 \times 0{,}5^n) = 0$ donc par somme $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,8}$

Partie B :

1. Choisir une trottinette est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « la trottinette est en bon état » de probabilité 0,8.
   On répète 15 fois cette épreuve de façon identique et indépendante (on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise et l'état d'une trottinette est indépendant de l'état des autres trottinettes). On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}8$.
   La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (le nombre de trottinettes qui sont en bon état) suit donc **la loi binomiale $\boldsymbol{B(15\,;0,8)}$**.

2. On calcule $P(X = 15)$.
   $P(X = 15) = \binom{15}{15} \times 0{,}8^{15} \times 0{,}2^0 = 1 \times 0{,}8^{15} \times 1 = 0{,}8^{15} \approx 0{,}035$
   La probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état est d'environ 0,035.

3. On calcule $P(X \geq 10)$.
   $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9)$
   D'après la calculatrice, $1 - P(X \leq 9) \approx 0{,}939$
   La probabilité qu'au moins 10 trottinettes sur les 15 prélevées soient en bon état est d'environ 0,939.

4. $E(X) = np = 15 \times 0{,}8 = 12$. Ainsi, **sur un grand nombre de lots de 15 trottinettes, il y aura en moyenne 12 trottinettes en bon état par lot.**

Exercice 3 : Géométrie dans l'espace

Dans le repère orthonormé $(A\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a : $A(0\,;0\,;0)$, $B(4\,;0\,;0)$, $C(4\,;4\,;0)$, $D(0\,;4\,;0)$, $E(0\,;0\,;8)$, $F(4\,;0\,;4)$, $G(4\,;4\,;4)$ et $H(0\,;4\,;8)$

1. Le point I est le milieu du segment $[EF]$.
   Donc, $I\left(\frac{x_E+x_F}{2};\frac{y_E+y_F}{2};\frac{z_E+z_F}{2}\right)$ $\quad\boldsymbol{I(2\,;0\,;6)}$
   Le point J est le milieu du segment $[AE]$.
   Donc, $J\left(\frac{x_E+x_A}{2};\frac{y_E+y_A}{2};\frac{z_E+z_A}{2}\right)$ $\quad\boldsymbol{J(0\,;0\,;4)}$

2. **a.** $\overrightarrow{IG}(x_G - x_I ; y_G - y_I ; z_G - z_I)$ $\overrightarrow{IG}(2 ; 4 ; -2)$
$\overrightarrow{IJ}(x_J - x_I ; y_J - y_I ; z_J - z_I)$ $\overrightarrow{IJ}(-2 ; 0 ; -2)$
Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas proportionnelles, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires.
$\vec{n}.\overrightarrow{IG} = -1 \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont orthogonaux.
$\vec{n}.\overrightarrow{IJ} = -1 \times (-2) + 1 \times 0 + 1 \times (-2) = 2 + 0 - 2 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.
Ainsi, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ), donc **le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).**

b. Le plan (IGJ) a pour vecteur normal $\vec{n}(-1 ; 1 ; 1)$ donc le plan (IGJ) a pour équation cartésienne : $-x + y + z + d = 0$ où d est un réel
De plus, le point $J(0 ; 0 ; 4)$ appartient au plan (IGJ) donc :
$-x_J + y_J + z_J + d = 0 \Leftrightarrow -0 + 0 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$
Donc, le plan (IGJ) a pour équation cartésienne : $\boldsymbol{-x + y + z - 4 = 0}$.

3. La droite d est perpendiculaire au plan (IGJ), donc elle a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (IGJ). Ainsi, le vecteur $\vec{n}(-1 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de la droite d qui passe par le point $H(0 ; 4 ; 8)$. Donc, la droite d a pour représentation paramétrique : $\boldsymbol{\begin{cases} x = -t \\ y = t + 4 \\ z = t + 8 \end{cases} t \in \mathbb{R}.}$

4. La droite d est orthogonale au plan (IGJ) et passe par le point H, donc le projeté orthogonal L du point H sur le plan (IGJ) est le point d'intersection de la droite d et du plan (IGJ) donc les coordonnées de L vérifient :

$$\begin{cases} -x + y + z - 4 = 0 \\ x = -t \\ y = t + 4 \\ z = t + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + t + 4 + t + 8 - 4 = 0 \\ x = -t \\ y = t + 4 \\ z = t + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t + 8 = 0 \\ x = -t \\ y = t + 4 \\ z = t + 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t = -\frac{8}{3} \\ x = -t = \frac{8}{3} \\ y = t + 4 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3} \\ z = t + 8 = -\frac{8}{3} + 8 = \frac{16}{3} \end{cases}$$ donc $\boldsymbol{L\left(\frac{8}{3} ; \frac{4}{3} ; \frac{16}{3}\right)}$

5. Le point L est le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ) donc la distance du point H au plan (IGJ) est la distance HL.
$\overrightarrow{HL}(x_L - x_H ; y_L - y_H ; z_L - z_H)$ $\overrightarrow{HL}\left(\frac{8}{3} ; -\frac{8}{3} ; -\frac{8}{3}\right)$
Donc $HL = \|\overrightarrow{HL}\| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ unités de longueur.

La distance du point H au plan (IGJ) est donc de $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ unités de longueur.

6. On rappelle que : $\overrightarrow{IG}(2\,;4\,;\,-2)$ et $\overrightarrow{IJ}(-2\,;0\,;\,-2)$
$\overrightarrow{IG}\,.\overrightarrow{IJ} = 2\times(-2)+4\times 0+(-2)\times(-2) = -4+0+4 = 0$
Donc, les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux donc les droites (IG) et (IJ) sont perpendiculaires donc **le triangle IGJ est rectangle en I.**

7. Le triangle IGJ est rectangle en I donc $A_{IGJ} = \frac{IG\times IJ}{2}$
Avec $IG = \|\overrightarrow{IG}\| = \sqrt{2^2+4^2+(-2)^2} = \sqrt{24} = \sqrt{6\times 4} = 2\sqrt{6}$ unités de longueur
Et $IJ = \|\overrightarrow{IJ}\| = \sqrt{(-2)^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = \sqrt{2\times 4} = 2\sqrt{2}$ unités de longueur
De plus, le point L est le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ) donc $[HL]$ est la hauteur du tétraèdre $IGJH$ relative à la base IGJ.
Donc $V_{IGJH} = \frac{1}{3}\times A_{IGJ}\times HL = \frac{1}{3}\times\frac{IG\times IJ}{2}\times HL = \frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{6}\times 2\sqrt{2}}{2}\times\frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{36}}{18} = \frac{192}{18} = \frac{32}{3}$ unités de volume
Le volume du tétraèdre $IGJH$ est de $\frac{32}{3}$ unités de volume.

Exercice 4 : Vrai/Faux sur les fonctions

1. Dérivons f pour trouver ses variations.
La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme somme d'un réel et d'une composée de la fonction exponentielle avec une fonction polynôme du second degré.
Pour tout $t\in[0\,;\,+\infty[, f'(t) = -(-t+1)e^{-0,5t^2+t+2} = (t-1)e^{-0,5t^2+t+2}$
Pour tout $t\in[0\,;\,+\infty[, e^{-0,5t^2+t+2} > 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $t-1$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
Pour tout $t\in[0\,;\,+\infty[, t-1>0 \Leftrightarrow t>1$. Ainsi, la fonction f' est positive sur $[1\,;\,+\infty[$ et négative sur $[0\,;1]$.
Donc, la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
Donc, la population de bactéries diminue la première heure, donc elle n'augmente pas en permanence. Ainsi, **l'affirmation 1 est fausse.**

2. On sait que pour tout réel x, $e^{-0,5t^2+t+2} > 0 \Leftrightarrow -e^{-0,5t^2+t+2} < 0$
$\Leftrightarrow e^3 - e^{-0,5t^2+t+2} < e^3 \Leftrightarrow f(t) < e^3$
Ainsi, $f(t)$ ne peut pas dépasser e^3, or $e^3 \approx 20{,}09 < 21$. Donc, la population de bactéries ne peut pas dépasser 21 000 bactéries, donc, **l'affirmation 2 est fausse.**

3. Calculons la limite de f en $+\infty$.

Il s'agit d'une forme indéterminée,

Pour tout $t \in [0\,;+\infty[, f(t) = e^3 - e^{t^2\left(-0,5+\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right)}$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \left(-0,5+\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right) = -0,5$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2(-0,5+\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t^2\left(-0,5+\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right)} = 0$ donc par produit et par somme $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = e^3$

D'après le travail fait pour l'affirmation 1,

La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[0\,;1]$

$f(0) = e^3 - e^{-0,5\times0^2+0+2} = e^3 - e^2 \approx 12,7 > 10$

$f(1) = e^3 - e^{-0,5\times1^2+1+2} = e^3 - e^{2,5} \approx 7,9 < 10$ et $10 \in [f(0); f(1)]$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$.

La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$

$f(1) = e^3 - e^{-0,5\times1^2+1+2} = e^3 - e^{2,5} \approx 7,9 < 10$

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = e^3 \approx 20,09 > 10$ et $10 \in [f(1); e^3]$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution sur $[1\,;\,+\infty[$.

Ainsi, l'équation $f(t) = 10$ admet exactement 2 solutions sur $[0\,;+\infty[$, donc la population de bactéries aura deux fois un effectif de 10 000 au cours du temps, donc **l'affirmation 3 est vraie.**