Mathématiques - Centres étrangers Afrique 2 - 2023

Merci d'adresser vos éventuelles remarques à `anthony.le.bihan@icloud.com`. Je ne réponds pas aux questions.

Exercice 1 : QCM

Question 1

On dérive une à une les expression proposées et on voit laquelle a pour dérivée $f(x) = xe^x$:

A. $F'(x) = \dfrac{2x}{2}e^x + \dfrac{x^2}{2}e^x = \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)e^x$

B. $F'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$ on peut s'arrêter ici donc.

C. $F'(x) = (x+2)e^x$

D. $F'(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + \dfrac{x}{2} \times 2xe^{x^2} = \left(x^2 + \dfrac{1}{2}\right)e^{x^2}$

Pour chacune des expressions, on pouvait appliquer la formule $(uv)' = u'v + v'u$. **La réponse est B.**

Question 2

On extrait des informations de l'énoncé : "le maximum de la fonction f est atteint en 3" : $f'(3) = 0$. "le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion" : $f''(5) = 0$.

On s'intéresse au graphe : sur $[0; 5]$ la fonction est en dessous de ses tangentes/cordes donc la fonction f est concave et $f'' < 0$ et f' est décroissante. Sur $[5, +\infty]$, la fonction est au dessus de ses cordes/tangentes donc la fonction est f est convexe et $f'' > 0$ et f' est croissante. On remarque aussi que sur $[0, 1]$, f est négative et sur que sur $[1, +\infty]$, f est positive. De même, f est croissante sur $[0, 3]$ donc $f' > 0$ et décroissante sur $[3, +\infty]$ donc $f' < 0$. On extrait donc le tableau de variation et de signe suivant :

x	0		1		3		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		concave		concave		concave	0	convexe	
$f''(x)$		-		-		-	0	+	
$f'(x)$		+		+	0	-		-	

La réponse est D.

Question 3

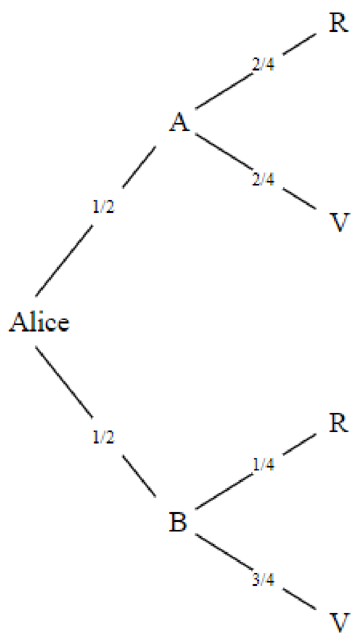
On sait que $\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$ donc $\lim_{t \to +\infty} g(t) = \dfrac{a}{b} = 3 \implies \boxed{a = 3b}$. Par ailleurs, $g(0) = \dfrac{a}{b+1} = 2 \implies \boxed{a = 2b + 2}$. Si on retranche les 2 encadrés l'un à l'autre, il vient $0 = b - 2 \implies b = 2$ et donc $a = 3b = 6$. La fonction g est donc :

$$g(t) = \frac{6}{2 + e^{-t}} \qquad \implies \qquad \boxed{a = 6 \quad b = 2}$$

La réponse est D.

Question 4

Puisqu'il est équiprobable de choisir l'urne A ou la B, on peut dresser l'arbre pondéré suivant :



A est l'événement "choisir l'urne A", idem pour B. R est l'événement "tirer une boule rouge" et V est l'événement "tirer une boule verte". Puisque (A, B) forme un système complet d'événements (ou une partition de l'univers), la formule des probabilités totales dit :

$$P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

Ensuite par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_V(B) = \frac{P(V \cap B)}{P(V)} = \frac{P_B(V)P(B)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$$

La réponse est C.

Question 5

`range(a,b)` parcourt les entiers de `a` à `b-1`. Si on ne spécifie pas `a`, par défaut `Python` prend `a=0`. Donc,

— le script A renvoie $\frac{1}{100}$, ce n'est pas ce qu'on veut. On initialise pourtant une variable, $S = 0$, mais à chaque passage dans la boucle S prend la valeur $1/(k+1)$ mais il n'y a aucune sommation.

— le script B corrige cette erreur puisque $1/(k+1)$ vient s'ajouter à la précédente valeur de S, on calcule donc : $\frac{1}{0+1} + \frac{1}{1+1} + \cdots + \frac{1}{99+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{100}$, c'est ce qu'on veut.

— le script C boucle sur S, `S<100`, or il faudrait le faire sur k car c'est c'est lui qui varie entre 0 et 100.

— le script D plante à la première itération car il appelle `S=S+1/(k+1)` mais `S` n'a jamais été défini auparavant. Donc échec.

La réponse est B.

Exercice 2 (6 points)

$$\begin{array}{rccc} f & : &]-1,5;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(2x+3)-1 \end{array}$$

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère $\forall x \in]-1,5;+\infty[, \quad g(x) = f(x) - x.$

1. Concrètement, $\lim\limits_{x \to -1,5} (g(x)) = \lim\limits_{x \to -1,5} (\ln(2x+3) + 0,5)$

Or on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Donc, par composition,

$$\boxed{\lim_{x\to -1,5} g(x) = -\infty}$$

2. g est définie et dérivable sur $]-1,5;+\infty[$ comme somme et composée de telles fonctions et

$$\forall x \in]-1,5;+\infty[, \quad g'(x) = \frac{2}{2x+3} - 0 - 1 = \frac{2}{2x+3} - \frac{2x+3}{2x+3} \implies \boxed{g'(x) = -\frac{2x+1}{2x+3}}$$

Ainsi, $g'(x) = 0 \iff 2x+1 = 0 \iff x = -0,5$. De plus
— $g(-0,5) = \ln(2) - \frac{1}{2}$
— $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = x \times \left(\dfrac{\ln(2x+3)}{x} - \dfrac{1}{x} - 1\right)$ or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 0$ par croissances comparées
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \times (0 - 0 - 1) = -\infty$
On peut donc dresser le tableau de variations de g :

x	$-3/2$		$-1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(2) - \frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

3a. Sur $]-1/2;+\infty[$,
— g est continue comme somme est composée de telles fonctions ;
— g est strictement décroissante ;
— $0 \in g(]-1/2;+\infty[) =]-\infty;\ln(2)-1/2[$
donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α sur l'intervalle $]-1/2;+\infty[$ à l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue x.

3b. On calcule $g(0) = \ln(3) - 1 = \simeq 0,09$ et $g(1/2) = \ln(4) - 1,5 \simeq -0,114$. Donc on a $\alpha \in]0;1/2[$. On peut donc demander à la calculatrice, via la fonction `tableau` d'afficher les valeurs de $g(x)$ pour $x \in]0;1/2[$. Si on veut une résolution de $10^{-2} = 0,01$ on rentre les paramètres suivants : `start=0` ; `end=0.5` et `step=0.01`. On a donc en particulier le résultat suivant :

x	$g(x)$
0,2	0,023775432
0,21	0,019640551
0,22	0,015471471
0,23	0,011268589
0,24	0,007032294
0,25	0,002762968
0,26	-0,00153901
0,27	-0,005873273
0,28	-0,010239455
0,29	-0,0146372
0,3	-0,019066155

On a donc $\alpha \in [0,25;0,26]$. On peut aussi itérer à la main par dichotomie.

Partie B : Etude de la suite (u_n)

1. Soit $x \in [-1;\alpha]$.

$-1 \leq x \leq \alpha \iff -2 \leq 2x \leq 2\alpha \iff 1 \leq 2x+3 \leq 2\alpha+3 \iff \ln(1) \iff \ln(2x+3) \iff \ln(2\alpha+3)$

Par application de la fonction ln strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$. Ainsi,

$$0 \leq \ln(2x+3) \leq \ln(2\alpha+3) \iff -1 \leq \ln(2x+3) - 1 \leq \ln(2\alpha+3) - 1$$

Or d'après la partie précédente $g(\alpha) = 0$ donc $f(\alpha) - \alpha = 0$ donc $f(\alpha) = \alpha$ et on reconnait donc $-1 \leq f(x) \leq \alpha$. On conclut donc :

$$\boxed{-1 \leq x \leq \alpha \quad \Longrightarrow \quad -1 \leq f(x) \leq \alpha}$$

2a. Notons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ la propriété "$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$".
Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0 = 0) = \ln(3) - 1 \simeq 0,09$. On a bien $-1 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$.
Hérédité : Soit $N \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}(N)$ est vraie. Montrons $\mathcal{H}(N+1)$. Il faut raisonner exactement comme la question précédente : construire u_{N+2} à partir de u_{N+1} et construire u_{N+1} à partir de u_N en conservant les encadrements. Donc, en appliquant directement la fonction f, strictement croissante sur $]-3/2, +\infty[$, il vient :

$$-1 \leq u_N \leq u_{N+1} \leq \alpha \iff f(-1) \leq f(u_N) \leq f(u_{N+1}) \leq f(\alpha)$$

Or $f(\alpha) = \alpha$ et $f(-1) = \ln(1) - 1 = -1$. On a donc directement :

$$-1 \leq u_{N+1} \leq u_{N+2} \leq \alpha$$

C'est $\mathcal{H}(N+1)$. On a donc prouvé que si $\mathcal{H}(N)$ est vraie, alors $\mathcal{H}(N+1)$ est vraie.
Conclusion : on a donc prouvé, par principe de récurence, que $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

2b. La question précédente nous permet de déduire 2 choses :
— la suite (u_n) est croissante
— la suite (u_n) est majorée par α
Donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge.

Exercice 3 (6 points)

1a. Par lecture graphique, $H \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $M \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $N \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1b. Pour donner une représentation paramétrique de (HM) il faut connaitre un point de la droite et un vecteur directeur :
— point : $H \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
— vecteur directeur : $\overrightarrow{HM} \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
Une représentation paramétrique de la droite (HM) est donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = 0 + 3t \\ y & = 2 - 2t \\ z & = 2 - 1t \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = 3t \\ y & = 2 - 2t \\ z & = 2 - t \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

2. On veut trouver une équation cartésienne du plan (BCF). Pour cela, il faudrait connaitre une équation normale à ce plan et on en déduirait l'équation cartésienne. Mais ici on voit directement que l'équation cartésienne du plan (BCF) est $x = 2$ (c'est une face du grand cube).
Donc, $P \in \{(HM) \cap (BCF)\} \iff P \in (HM)$ ET $P \in (BCF)$. P doit donc à la fois vérifier l'équation cartésienne de (BCF) et l'équation paramétrique de (HM). Ainsi :

$$P \in \left\{ \begin{array}{ll} x & = 2 \\ x & = 0 + 3t \\ y & = 2 - 2t \\ z & = 2 - t \end{array} \right. \iff P \in \left\{ \begin{array}{ll} x & = 2 \\ t & = 2/3 \\ y & = 2 - 2 \times 2/3 \\ z & = 2 - \times 2/3 \end{array} \right. \iff P \in \left\{ \begin{array}{ll} t & = 2/3 \\ x & = 2 \\ y & = 2/3 \\ z & = 4/3 \end{array} \right.$$

Les coordonnées de P sont donc $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

3a. On calcule d'abord les vecteurs : $\overrightarrow{PM} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-\frac{2}{3} \\ 1-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PN} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-\frac{2}{3} \\ 1-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On peut donc calculer le produit scalaire :

$$\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PM} = 1 \times 1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

3b. La distance PM n'est rien d'autre que la norme du vecteur $\overrightarrow{PM}$:

$$PM = ||\overrightarrow{PM}|| = \sqrt{1^2 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

— Pour accéder à la valeur de cet angle, on se rappelle de la définition initiale d'un produit scalaire : $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PM} = ||\overrightarrow{PM}|| \times ||\overrightarrow{PN}|| \times \cos(\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PM})$. Ainsi,

$$\cos(\widehat{MPN}) = \frac{\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PM}}{PM \times PN} = \frac{8/9}{\frac{\sqrt{14}}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{3}} = \frac{8}{\sqrt{154}}$$

Et donc,

$$\widehat{MPN} = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{154}}\right) \simeq 49,8°$$

$\widehat{MPN} < 55°$ donc le toit pourra être construit.

4. Les droites (MN) et (EH) sont parallèles (par construction des cubes) donc les droites (EN) et (HM) sont coplanaires et non-parallèles. Elle sont donc sécantes. Il faut définir la représentation paramétrique de (EN). Il faut connaitre un point de la droite et un vecteur directeur :
   — point : $E\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$
   — vecteur directeur : $\overrightarrow{EN}\begin{pmatrix}3-0\\1-0\\1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

   Une représentation paramétrique de la droite (EN) est donc :

$$\begin{cases} x &= 0 + 3t' \\ y &= 0 + 1t' \\ z &= 2 - 1t' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x &= 3t' \\ y &= t' \\ z &= 2 - t' \end{cases} \qquad t' \in \mathbb{R}$$

On va donc chercher les paramètres t et t' qui permettent de déterminer les coordonnées du point d'intersection.

$$(HM) = (EN) \iff \begin{cases} 3t &= 3t' \\ 2 - 2t &= t' \\ 2 - t &= 2 - t' \end{cases} \iff \begin{cases} t &= t' \\ 3t &= 2 \\ t &= t' = 2/3 \end{cases}$$

On peut réinjecter cette valeur de paramètre dans les équations paramètres des droites pour déterminer les coordonnées du point d'intersection. On peut, sinon, se souvenir que ce paramètre était déjà associé au point P. Le point d'intersection est donc P.

Exercice 4 (3 points)

On va traiter l'exercice condition par condition.

Condition 1

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de joueurs au 2ème tour ou bien le nombre de succès au premier tour (c'est la même chose). La probabilité d'arriver au deuxième tour est de 0,6, c'est la probabilité de succès. C'est purement un schéma de Bernoulli, mais comme il y a 4 joueurs, on repète 4 fois ce schéma de succès "aller au 2ème tour" de probabilité de succès $p = 0,6$.

Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = 0,6$: $X \sim \mathcal{B}(4; 0,6)$.

Pour que la 2ème tour ait lieu, il faut $X \geq 2$. On cherche donc $P(X \geq 2)$ et on veut cette probabilité supérieure à 80%. On peut aussi chercher son événement contraire :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{4}{0} 0,6^0 0,4^4 - \binom{4}{1} 0,6^1 0,4^3 = 1 - 0,4^4 - 4 \times 0,6 \times 0,4^3$$

On trouve : $P(X \geq 2) \simeq 0,82 = 82\% > 80$. La condition 1 est donc respectée.

Condition 2

Soit Y la variable aléatoire désignant la durée du 2ème tour, en minute. $Y(\Omega) = \{0; 5; 9; 11\}$. On peut décrire sa variable aléatoire :

- $P(Y = 0) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,18$
- $P(Y = 5) = P(X = 2) = \binom{4}{2} 0,6^2 \times 0,4^2 = 0,345$
- $P(Y = 9) = P(X = 3) = \binom{4}{3} 0,6^3 \times 0,4^1 = 0,345$
- $P(Y = 11) = P(X = 4) = \binom{4}{4} 0,6^4 = 0,13$

On peut vérifier que $\sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y) = P(Y = 0) + P(Y = 5) + P(Y = 9) + P(Y = 11) = 1$. On cherche donc $E(Y)$. On applique la formule de l'espérance :

$$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y) = 0 \times P(Y = 0) + 5 \times P(Y = 5) + 9 \times P(Y = 9) + 11 \times P(Y = 11)$$

On trouve : $E(Y) = 6,26 > 6$. La condition 2 n'est pas respectée.

Conclusion

Le jeu ne peut pas être retenu.