CORRECTION DU BAC

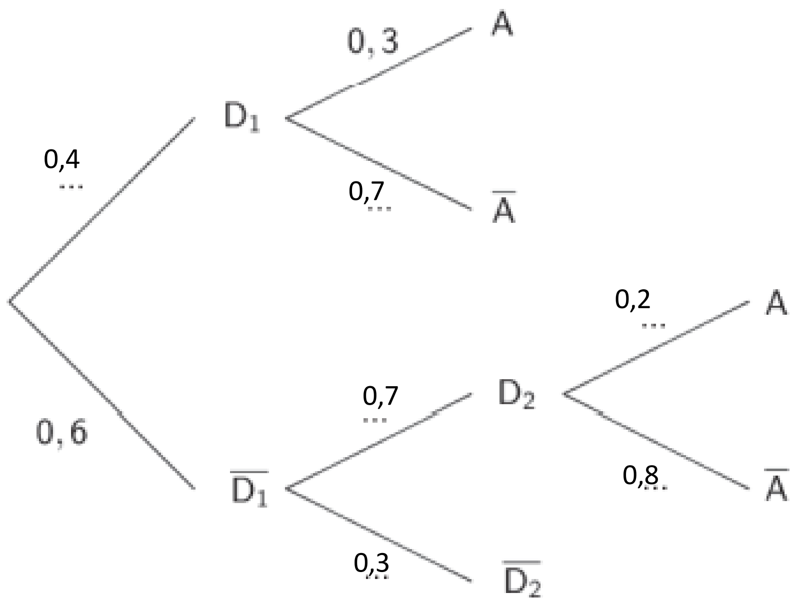
MATHEMATIQUES

LA REUNION – 2023 – JOUR 1

Exercice 1 : Probabilités

Partie A

1. D'après $P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) = 0{,}3$ et $P_{D_2}(A) = 0{,}2$



2. D'après la formule des probabilités totales :
$\boldsymbol{P(A) = P(D_1 \cap A) + P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap A) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 = 0,204}$

3. On calcule $P_A(D_1)$
$P_A(D_1) = \frac{P(D_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(D_1) \times P_{D_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}3}{0{,}204} = \frac{10}{17} \approx 0{,}59.$
La probabilité que la personne ait décroché au premier appel sachant qu'elle a acheté le produit est de $\frac{10}{17}$, soit environ 0,59.

Partie B :

1. a. $\boldsymbol{X}$ **suit la loi binomiale** $\boldsymbol{B(30\,;0,204)}$.

   b. On calcule $P(X = 6)$.
   $P(X = 6) = \binom{30}{6} \times 0{,}204^6 \times 0{,}796^{24} = 593775 \times 0{,}204^6 \times 0{,}796^{24} \approx 0{,}179.$
   La probabilité qu'exactement 6 personnes achètent le produit est d'environ 0,179.

   c. $\boldsymbol{E(X) = np = 30 \times 0,204 = 6,12}$
   Sur un grand nombre d'échantillons de 30 personnes, en moyenne 6,12 personnes achèteront le produit.

2. On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes qui achètent le produit dans un échantillon de n personnes contactées.

Appeler une personne est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « la personne achète le produit » de probabilité 0,204.

On répète n fois cette épreuve de façon identique et indépendante. On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = 0{,}204$.

La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès (le nombre de personnes ayant acheté le produit) suit donc la loi binomiale $B(n\,;0{,}204)$.

On calcule la probabilité qu'au moins une personne achète le produit, soit $P(Y \geq 1)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}204^0 \times 0{,}796^n$

$P(Y \geq 1) = 1 - 1 \times 1 \times 0{,}796^n = 1 - 0{,}796^n$.

On cherche n tel que $P(Y \geq 1) \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow 1 - 0{,}796^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}796^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow \ln(0{,}796^n) \leq \ln 0{,}01$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

$\Leftrightarrow n \ln 0{,}796 \leq \ln 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}796}$ car $0{,}796 < 1$ donc $\ln 0{,}796 < 0$.

Or, $\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}796} \approx 20{,}18$ donc $n \geq 21$. Ainsi, **il est nécessaire de contacter au moins 21 personnes pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99.**

<u>Exercice 2 :</u> Fonctions

1. $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = 0$ (croissance comparée) donc par produit $\lim\limits_{x\to 0}(-2x\ln x) = 0$ donc par somme $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1}$

   En $+\infty$, forme indéterminée
   Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[, f(x) = x(3 + \frac{1}{x} - 2\ln x)$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2\ln x) = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}(3 + \frac{1}{x} - 2\ln x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit
   $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

2. **a.** f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$,
   Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[, \boldsymbol{f'(x) = 3 - 2\ln x + x \times \frac{-2}{x} = 3 - 2 - 2\ln x = 1 - 2\ln x}$.

   b. Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[, f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   On a donc :

$\boldsymbol{x}$	**0**		$\boldsymbol{e^{\frac{1}{2}}}$		α	$+\infty$
Signe de $\boldsymbol{f'(x)}$	**|**	**+**	**0**	**-**		
Variations de $\boldsymbol{f}$	**|1**	$\nearrow$	$\boldsymbol{2e^{\frac{1}{2}} + 1}$	$\searrow$	0	$-\infty$

   $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - 2 \times e^{\frac{1}{2}} \times \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - 2 \times e^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = 2e^{\frac{1}{2}} + 1$

3. **a.** Sur $[e^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante.
   $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 2e^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $0 \in [2e^{\frac{1}{2}} + 1\,;\,-\infty[$
   Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[e^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty[$.
   Sur $]0\,;\,e^{\frac{1}{2}}]$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 > 0$ donc sur$]0\,;\,e^{\frac{1}{2}}]$, f est strictement positive. Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $]0\,;\,e^{\frac{1}{2}}]$.
   Ainsi, l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet exactement une solution $\boldsymbol{\alpha}$ sur $\boldsymbol{]0\,;\,+\infty[}$.

   b. D'après le tableau de variations, on peut déduire le tableau de signe suivant :

$\boldsymbol{x}$	**0**		$\boldsymbol{\alpha}$		$+\infty$
Signe de $\boldsymbol{f(x)}$	**|**	**+**	**0**	**-**	

4. F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Donc, f est la dérivée de F sur $]0\,;\,+\infty[$. On sait que, sur $[e^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty[$, f est positive sur $[e^{\frac{1}{2}}\,;\alpha]$ et négative sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, ainsi, sur $[e^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty[$, F n'est pas monotone, **on ne peut donc pas affirmer qu'elle est strictement décroissante.**

5. **a.** La fonction f' est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
Pour tout $x \in \,]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = -\frac{2}{x}$.
Pour tout $\in \,]0\,;\,+\infty[, x > 0$ donc par quotient $f''(x) < 0$. Ainsi, **la fonction $\boldsymbol{f}$ est concave sur $\boldsymbol{]0\,;\,+\infty[}$.**

b. $f'(1) = 1 - 2\ln(1) = 1 - 2 \times 0 = 1$
et $f(1) = 3 \times 1 + 1 - 2 \times 1 \times \ln 1 = 3 + 1 - 2 \times 0 = 4$.
T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1(x-1) + 4 = \boldsymbol{x + 3}$.

c. La fonction f est concave sur $]0\,;\,+\infty[$, donc C_f est au-dessus de ses tangentes, et en particulier de T.
Donc pour tout $x \in \,]0\,;\,+\infty[, f(x) \geq x + 3 \Leftrightarrow 3x + 1 - 2x\ln x \geq x + 3$
$\Leftrightarrow -2x\ln x \geq -2x + 2 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{-2x+2}{-2x} \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{-2x}{-2x} + \frac{2}{-2x} \Leftrightarrow \boldsymbol{\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}}$.

Exercice 3 : Suites

Partie A : QCM

1. $u_0 = 3 \quad u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2} \times 0 + 1 = \frac{1}{2} \times 3 + 1 = 2{,}5$
   $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{1}{2} \times 2{,}5 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{4}$ **Réponse a.**

2. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 - n - 1$
   $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(u_n - n) = \frac{1}{2}v_n$. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. **Réponse b.**

3. Dans la boucle, le rang du terme calculé est donné par i + 1, donc, le n de la définition de la suite doit être remplacé par i. Ainsi, la ligne 4 doit complétée par l'instruction U = U/2 + i/2 + 1 **Réponse d.**

Partie B

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $n \leq u_n \leq n + 3$.

   Initialisation : $u_0 = 3$ $\quad n = 0$ et $n + 3 = 0 + 3 = 3$ or $0 \leq 3 \leq 3$ donc $0 \leq u_0 \leq 0 + 3$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

   Hérédité : Supposons que pour un entier naturel k, $k \leq u_k \leq k + 3$ et montrons qu'alors $k + 1 \leq u_{k+1} \leq k + 4$.
   D'après l'hypothèse de récurrence, $k \leq u_k \leq k + 3$.
   On multiplie par $\frac{1}{2} > 0$ $\quad \frac{1}{2}k \leq \frac{1}{2}u_k \leq \frac{1}{2}(k + 3)$
   On ajoute $\frac{1}{2}k + 1$ $\quad \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k + 1 \leq \frac{1}{2}u_k + \frac{1}{2}k + 1 \leq \frac{1}{2}k + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}k + 1$
   Par définition, $\frac{1}{2}u_k + \frac{1}{2}k + 1 = u_{k+1}$
   On a donc : $k + 1 \leq u_{k+1} \leq k + \frac{5}{2}$
   Or, $\frac{5}{2} \leq 4$ donc $k + \frac{5}{2} \leq k + 4$
   On a alors : $k + 1 \leq u_{k+1} \leq k + \frac{5}{2} \leq k + 4$ soit $k + 1 \leq u_{k+1} \leq k + 4$.
   La propriété est héréditaire.

   Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{n \leq u_n \leq n + 3}$.

2. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $n \leq u_n$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.
   Donc, d'après le théorème de comparaison, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, $n \leq u_n \leq n+3$

On divise par $n > 0$, $\frac{n}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+3}{n}$, soit $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n}{n} + \frac{3}{n}$ soit $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{3}{n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right) = 1$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1}$.

<u>Exercice 4 :</u> Géométrie dans l'espace

1. $\boldsymbol{F(1\,;1\,;1)}$ **et** $\boldsymbol{C(0\,;1\,;0)}$.

2. M est le centre de la face $BCGF$ donc il s'agit du milieu du segment $[FC]$.
   Donc, $M\left(\frac{x_C+x_F}{2}\,;\frac{y_C+y_F}{2}\,;\frac{z_C+z_F}{2}\right)$ donc $\boldsymbol{M(0,5\,;1\,;0,5)}$.
   N est le centre de la face $EFGH$ donc il s'agit du milieu du segment $[FH]$.
   $H(1\,;0\,;0)$ donc $N\left(\frac{x_F+x_H}{2}\,;\frac{y_F+y_H}{2}\,;\frac{z_F+z_H}{2}\right)$ donc $\boldsymbol{N(1\,;0,5\,;0,5)}$.

3. **a.** On vérifie que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{HC}$.
   $A(0\,;0\,;1)$ $G(1\,;1\,;0)$
   $\overrightarrow{AG}(x_G-x_A\,;y_G-y_A\,;z_G-z_A)$ $\overrightarrow{AG}(1\,;1\,;-1)$
   $\overrightarrow{HF}(x_F-x_H\,;y_F-y_H\,;z_F-z_H)$ $\overrightarrow{HF}(0\,;1\,;1)$
   $\overrightarrow{HC}(x_C-x_H\,;y_C-y_H\,;z_C-z_H)$ $\overrightarrow{HC}(-1\,;1\,;0)$
   On remarque les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{HC}$ ne sont pas proportionnelles, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et définissent bien le plan (HFC).
   $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{HF}=1\times 0+1\times 1+(-1)\times 1=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont orthogonaux.
   $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{HC}=1\times(-1)+1\times 1+(-1)\times 0=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux.
   Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à des vecteurs directeurs du plan (HFC) donc **il est normal au plan** $\boldsymbol{(HFC)}$.

   b. Le plan (HFC) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AG}(1\,;1\,;-1)$.
   Donc, le plan (HFC) a pour équation cartésienne $x+y-z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.
   De plus $C(0\,;1\,;0)\in(HFC)$ donc $x_C+y_C-z_C+d=0 \Leftrightarrow 0+1+0+d=0 \Leftrightarrow d=-1$. Ainsi, le plan (HFC) a pour équation cartésienne $\boldsymbol{x+y-z-1=0}$.

4. La droite (AG) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(1\,;1\,;-1)$ et passe par le point $A(0\,;0\,;1)$.
   La droite (AG) a donc pour représentation paramétrique : $\boldsymbol{\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}}$.

5. La droite (AG) a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (HFC) donc la droite (AG) est perpendiculaire au plan (HFC). Ainsi, comme $G\in(AG)$, le projeté orthogonal du point G sur le plan (HFC) et le point d'intersection entre la droite (AG) et le plan (HFC).
   On considère le point $R\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$. Montrons qu'il appartient au plan (HFC).
   $x_R+y_R-z_R-1=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-1=0$ donc le point R appartient au plan (HFC).

Montrons que le point R appartient aussi à la droite (AG), c'est-à-dire qu'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_R = t \\ y_R = t \\ z_R = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \\ t = 1 - z_R = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$ donc t existe donc le point R appartient à la droite (AG). Ainsi, le point R est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (HFC). **Le point $\boldsymbol{R\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)}$ est le projeté orthogonal du point $\boldsymbol{G}$ sur le plan $\boldsymbol{(HFC)}$.**

6. Soit K un point quelconque de la droite (FG). Pour tout réel t, $K(1\,;1\,;t)$.
Le triangle KMN est rectangle en K si, et seulement si, $\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{KN} = 0$
$\overrightarrow{KM}(x_M - x_K\,; y_M - y_K\,; z_M - z_K)$ $\overrightarrow{KM}(-0{,}5\,;0\,;0{,}5 - t)$
$\overrightarrow{KN}(x_N - x_K\,; y_N - y_K\,; z_N - z_K)$ $\overrightarrow{KN}(0\,;\,-0{,}5\,;0{,}5 - t)$
$\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{KN} = (-0{,}5) \times 0 + 0 \times (-0{,}5) + (0{,}5 - t)^2 = (0{,}5 - t)^2$
Donc $\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{KN} = 0 \Leftrightarrow (0{,}5 - t)^2 = 0 \Leftrightarrow 0{,}5 - t = 0 \Leftrightarrow t = 0{,}5$. Donc, **il existe un unique point $\boldsymbol{K}$ de la droite $\boldsymbol{(FG)}$ tel que le triangle $\boldsymbol{KMN}$ est rectangle en $\boldsymbol{K}$: $\boldsymbol{K(1\,;1\,;0{,}5)}$.**

7. Le cube $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, donc son volume est de 1 unité de volume.
On prend pour base du tétraèdre $FNKM$ le triangle KMN rectangle en K.
Ainsi, son aire est $A = \frac{KM \times KN}{2}$.
$\overrightarrow{KM}(-0{,}5\,;0\,;0{,}5 - 0{,}5)$ soit $\overrightarrow{KM}(-0{,}5\,;0\,;0)$ donc $KM = \sqrt{(-0{,}5)^2 + 0^2 + 0^2} =$ 0,5 unités de longueur
$\overrightarrow{KN}(0\,;\,-0{,}5\,;0{,}5 - 0{,}5)$ soit $\overrightarrow{KN}(0\,;\,-0{,}5\,;0)$ donc $KN = \sqrt{0^2 + (-0{,}5)^2 + 0^2} =$ 0,5 unités de longueur
$A = \frac{0{,}5 \times 0{,}5}{2} = \frac{1}{8}$ unités d'aire.

Vérifions que $[FK]$ est la hauteur du tétraèdre $FNKM$ relative à la base KMN.
$\overrightarrow{FK}(x_K - x_F\,; y_K - y_F\,; z_K - z_F)$ $\overrightarrow{FK}(0\,;0\,;\,-0{,}5)$.
$\overrightarrow{FK}.\overrightarrow{KM} = 0 \times (-0{,}5) + 0 \times 0 + (-0{,}5) \times 0 = 0$
$\overrightarrow{FK}.\overrightarrow{KN} = 0 \times 0 + 0 \times (-0{,}5) + (-0{,}5) \times 0 = 0$
Donc, le vecteur $\overrightarrow{FK}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (KMN), ainsi, $[FK]$ est la hauteur du tétraèdre $FNKM$ relative à la base KMN.
$FK = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-0{,}5)^2} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$
Donc le volume V du tétraèdre $FNKM$ est $V = \frac{1}{3} \times A \times FK = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{48}$ unités de volume.
Ainsi, **le volume du tétraèdre $\boldsymbol{FNKM}$ représente $\boldsymbol{\frac{1}{48}}$ du volume du cube $\boldsymbol{ABCDEFGH}$.**