CORRECTION DU BAC : SPECIALITE MATHEMATIQUES – LIBAN 2023
JOUR 1

Exercice 1 : Fonctions

Partie A :

1. Déterminons la limite de la fonction g en 0.
   $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x^2) = -\infty$
   $\lim\limits_{x \to 0}(x-2) = -2$ donc par somme $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty}$**.**

   Déterminons la limite de g en $+\infty$.
   $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2) = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to +\infty}(x-2) = +\infty$ donc par somme $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$**.**

2. Dérivons g afin d'étudier ses variations.
   La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$
   On pose pour tout$x \in]0\,;\,+\infty[$, $g(x) = \ln u(x) + x - 2$ avec $u(x) = x^2$
   Donc, $g' = \frac{u'}{u} + 1$ avec $u'(x) = 2x$.
   Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = \frac{2x}{x^2} + 1 = \frac{2}{x} + 1 = \frac{x+2}{x}$.
   Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $x > 0$ donc $x + 2 > 0$. Ainsi, $g'(x) > 0$ par quotient. Donc, **la fonction $\boldsymbol{g}$ est strictement croissante sur $\boldsymbol{]0\,;\,+\infty[}$.**

3. **a.** Sur $]0\,;\,+\infty[$, la fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante.
   $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty\,;\,+\infty[$.
   Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$. Ainsi, **il existe un unique réel $\boldsymbol{\alpha}$ strictement positif tel que $\boldsymbol{g(\alpha) = 0}$.**

   b. D'après la calculatrice, $g(1{,}37) < 0$ et $g(1{,}38) > 0$ donc $\boldsymbol{1{,}37 < \alpha < 1{,}38}$.

4. La fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et s'annule en α donc la fonction g est négative sur $]0\,;\alpha[$ et positive sur $]\alpha\,;\,+\infty[$. On a donc :

$\boldsymbol{x}$	**0**		$\boldsymbol{\alpha}$		$+\infty$
Signe de $\boldsymbol{g(x)}$	**|**	**-**	**0**	**+**	

Partie B :

1. **a.** $\lim\limits_{x \to 0}(x-2) = -2$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$
   La fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ donc on s'intéresse à la limite 0 avec $x > 0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x-2}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc par produit $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x)} = +\infty$

b. Ainsi, **la courbe C_f admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 0$.**

2. En $+\infty$, forme indéterminée.

Pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x}\ln x = \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc par produit $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)} = +\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$,

Dérivons d'abord $(x-2)\ln x$.

Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $\big((x-2)\ln x\big)' = \ln x + \frac{x-2}{x}$.

On en déduit la dérivée de la fonction f.

Pour tout réel x strictement positif,

$f'(x) = \frac{\left(\ln x + \frac{x-2}{x}\right)x - (x-2)\ln x}{x^2} = \frac{x\ln x + x - 2 - x\ln x + 2\ln x}{x^2} = \frac{\ln(x^2) + x - 2}{x^2} = \boldsymbol{\frac{g(x)}{x^2}}$

4. Pour tout réel x strictement positif, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $]\alpha\,;\,+\infty[$ et strictement négative sur $]0\,;\alpha[$. Donc, **la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.**

Partie C :

Pour cela, on étudie le signe de $f(x) - \ln x$.

Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln x = \frac{x-2}{x}\ln x - \ln x = \left(\frac{x-2}{x} - 1\right)\ln x = \frac{x-2-x}{x}\ln x = \frac{-2}{x}\ln x$

Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $x > 0$ et $-2 < 0$ donc par quotient, $-\frac{2}{x} < 0$ donc $f(x) - \ln x$ est du signe opposé à celui de $\ln x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

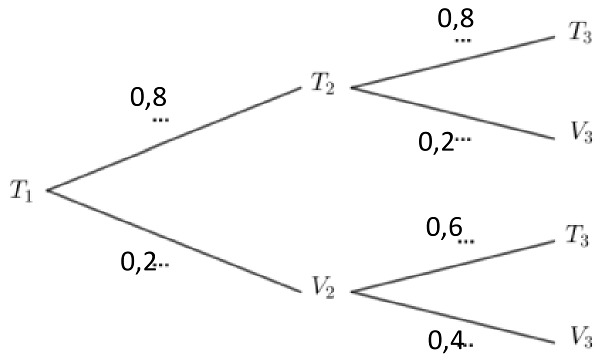
Ainsi, $f(x) - \ln x > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln x < 0$ sur $]0\,;1[$

et $f(1) - \ln 1 = \frac{1-2}{1}\ln 1 - \ln 1 = 0$. Ainsi, **la courbe C_f est au-dessous la courbe représentative de la fonction ln sur $]0\,;1[$ et au-dessus de cette dernière sur $]1\,;\,+\infty[$. Ces deux courbes s'interceptent en $x = 1$.**

<u>Exercice 2 :</u> Probabilités

D'après l'énoncé, $P_{T_n}(T_{n+1}) = 0{,}8$ et $P_{V_n}(V_{n+1}) = 0{,}4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

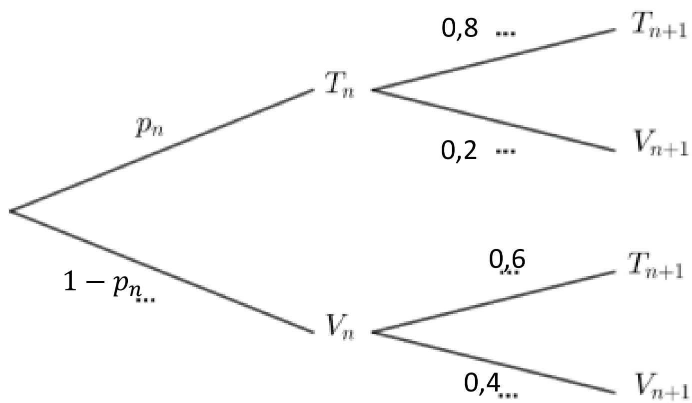
1.



2. D'après la formule des probabilités totales :
$p_3 = P(T_3) = P(T_3 \cap T_2) + P(T_3 \cap V_2) = P(T_2) \times P_{T_2}(T_3) + P(V_2) \times P_{V_2}(T_3)$
$\boldsymbol{p_3 = 0{,}8 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}64 + 0{,}12 = 0{,}76}$

3. On calcule $P_{V_3}(T_2)$.
$P_{V_3}(T_2) = \frac{P(V_3 \cap T_2)}{P(V_3)} = \frac{P(T_2) \times P_{T_2}(V_3)}{1 - p_3} = \frac{0{,}8 \times 0{,}2}{1 - 0{,}76} = \frac{0{,}16}{0{,}24} = \frac{2}{3}$
La probabilité que M. Durand ait pris les transports le deuxième jour sachant qu'il a pris son vélo le deuxième jour est de $\frac{2}{3}$.

4.



5. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$p_{n+1} = P(T_{n+1}) = P(T_{n+1} \cap T_n) = P(T_{n+1} \cap V_n)$
$p_{n+1} = P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(V_n) \times P_{V_n}(T_{n+1}) = 0{,}8p_n + 0{,}6(1 - p_n)$
$\boldsymbol{p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}6 - 0{,}6p_n = 0{,}2p_n + 0{,}6.}$

6. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}$.

<u>Initialisation :</u> $p_1 = 1$ et $0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{1-1} = 0{,}75 + 0{,}25 \times 1 = 1$

Donc $p_1 = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{1-1}$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour entier naturel $k \geq 1$, $p_k = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{k-1}$ et montrons qu'alors $p_{k+1} = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^k$.
Par définition, $p_{k+1} = 0{,}2p_k + 0{,}6$
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $p_k = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{k-1}$
Donc, $p_{k+1} = 0{,}2(0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{k-1}) + 0{,}6 = 0{,}15 + 0{,}25 \times 0{,}2^k + 0{,}6$
$p_{k+1} = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^k$ La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$\boldsymbol{p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}}$

7. $\lim_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$ et $\lim_{N \to +\infty} 0{,}2^N = 0$ car $0 < 0{,}2 < 1$ donc par composition $\lim_{n \to +\infty} 0{,}2^{n-1} = 0$ donc par produit et par somme $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,75.}$
Ainsi, **à long terme, la probabilité que M. Durand prenne les transports un jour donné va se rapprocher de 0,75.**

<u>Exercice 3 :</u> QCM sur les fonctions et les suites

1. Dérivons les quatre fonctions proposées.
F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction polynôme du second degré et de la fonction exponentielle.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^2}{2}e^x$ donc $F'(x) = xe^x + \frac{x^2}{2}e^x \neq f(x)$
Donc, F n'est pas une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine et de la fonction exponentielle.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = e^x + (x-1)e^x = (1+x-1)e^x = xe^x = f(x)$
Donc, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On peut arrêter le raisonnement ici puisqu'une seule des quatre réponses proposées est exacte. **Réponse b**

2. $g(x)$ existe si, et seulement si, $\frac{x-1}{2x+4} > 0$ donc on étudie le signe de ce quotient.
Pour tout réel x, $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
Pour tout réel x, $2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -2$
On a donc le tableau de signe suivant

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		-		-	0	+	
Signe de $2x+4$		-	0	+		+	
Signe de $\frac{x-1}{2x+4}$		+	||	-	0	+	

Ainsi $\frac{x-1}{2x+4} > 0$ sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$. Donc, la fonction g est définie sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$. **Réponse c**

3. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine et de la fonction exponentielle.
Pour tout réel x, $h'(x) = e^x + (x+1)e^x = (1+x+1)e^x = (x+2)e^x$.
La fonction h' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine et de la fonction exponentielle.
Pour tout réel x, $h''(x) = e^x + (x+2)e^x = (1+x+2)e^x = (x+3)e^x$
Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $h''(x)$ est du signe de $x+3$ sur $\mathbb{R}$
Pour tout réel x, $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$
Donc, $h''(x) > 0$ sur $]-3\,;\,+\infty[$ et $h''(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,-3[$
Donc, la fonction h est convexe sur $[-3\,;\,+\infty[$ et concave sur $]-\infty\,;\,-3]$.
Réponse d

4. La suite (u_n) est minorée par 3 est converge vers un réel l.
Ainsi, la limite l de (u_n) est supérieure ou égale à 3. **Réponse b**

5. La suite (w_n) est définie par $w_1 = 2$ et $w_{n+1} = \frac{1}{n}w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
Calculons les premiers termes de la suite (w_n)

$w_1 = 2 \quad w_2 = \frac{1}{1}w_1 = \frac{1}{1} \times 2 = 2 \quad w_3 = \frac{1}{2}w_2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$
$w_4 = \frac{1}{3}w_3 = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$ et $w_5 = \frac{1}{4}w_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{15}$. La réponse c est donc fausse.

De plus, on remarque que $\frac{w_2}{w_1} \neq \frac{w_3}{w_2}$, donc la suite (w_n) n'est pas géométrique donc la réponse a est fausse.

Pour chercher si (w_n) a une limite, montrons qu'elle est décroissante est minorée. Ainsi, montrons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 < w_{n+1} \leq w_n$

<u>Initialisation :</u> $w_1 = 2$ et $w_2 = 2$ donc $0 < w_2 \leq w_1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

<u>Hérédité :</u> Supposons que pour entier naturel $k \geq 1, 0 < w_{k+1} \leq w_k$ et montrons qu'alors $0 < w_{k+2} \leq w_{k+1}$
D'après l'hypothèse de récurrence, $0 < w_{k+1} \leq w_k$
On multiplie par $\frac{1}{k} > 0$ car $k > 0$, on a donc : $0 < \frac{1}{k}w_{k+1} \leq \frac{1}{k}w_k$
Or, par définition, $\frac{1}{k}w_k = w_{k+1}$ et $\frac{1}{k}w_{k+1} = w_{k+2}$
On a donc, $0 < w_{k+2} \leq w_{k+1}$ La propriété est héréditaire.

<u>Conclusion :</u> La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 < w_n \leq w_{n+1}$.

Ainsi, la suite (w_n) est décroissante et minorée par 0, donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, la suite (w_n) est convergente vers $l \geq 0$. Donc, elle admet une limite, ainsi la réponse b est fausse.

Par déduction, **Réponse d**

<u>Exercice 4 :</u> Géométrie dans l'espace

1. $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,; y_B - y_A\,; z_B - z_A)$ $\quad\overrightarrow{AB}(4\,;1\,;4)$
   $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,; y_C - y_A; z_C - z_A)$ $\quad\overrightarrow{AC}(2\,;5\,;\,-6)$
   Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc **les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan.**

2. **a.** $\vec{n}\,.\overrightarrow{AB} = 13 \times 4 + (-16) \times 1 + (-9) \times 4 = 52 - 16 - 36 = 0$
   Donc, les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
   $\vec{n}\,.\overrightarrow{AC} = 13 \times 2 + (-16) \times 5 + (-9) \times (-6) = 26 - 80 + 54 = 0$
   Donc, les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
   Ainsi, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan P. Ainsi, **le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan P.**

   b. Le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}(13\,;\,-16\,;\,-9)$. Le plan P a donc pour équation cartésienne : $13x - 16y - 9z + d = 0$ où d est un réel.
   De plus, le point $C(1\,;2\,;\,-4)$ appartient au plan P donc $13x_C - 16y_C - 9z_C + d = 0$
   $\Leftrightarrow 13 \times 1 - 16 \times 2 - 9 \times (-4) + d = 0 \Leftrightarrow 13 - 32 + 36 + d = 0 \Leftrightarrow d = -17.$
   Le plan P a donc pour équation cartésienne : $\mathbf{13x - 16y - 9z - 17 = 0.}$

3. Le droite D est orthogonale au plan P donc elle a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan P. Le vecteur $\vec{n}(13\,;\,-16\,;\,-9)$ est un vecteur directeur de la droite D qui passe par le point $F(15\,;\,-16\,;\,-8)$. La droite D a donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} \boldsymbol{x = 15 + 13t} \\ \boldsymbol{y = -16 - 16t} \\ \boldsymbol{z = -8 - 9t} \end{cases}$ $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$

4. Le point E est le point d'intersection du plan P et de la droite D donc ses coordonnés vérifient :

$$\begin{cases} 13x - 16y - 9z - 17 = 0 \\ x = 15 + 13t \\ y = -16 - 16t \\ z = -8 - 9t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 13(15 + 13t) - 16(-16 - 16t) - 9(-8 - 9t) - 17 = 0 \\ x = 15 + 13t \\ y = -16 - 16t \\ z = -8 - 9t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 195 + 169t + 256 + 256t + 72 + 81t - 17 = 0 \\ x = 15 + 13t \\ y = -16 - 16t \\ z = -8 - 9t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 506 + 506t = 0 \\ x = 15 + 13t \\ y = -16 - 16t \\ z = -8 - 9t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ x = 15 + 13t = 15 + 13 \times (-1) = 2 \\ y = -16 - 16t = -16 - 16 \times (-1) = 0 \\ z = -8 - 9t = -8 - 9 \times (-1) = 1 \end{cases}$$ donc $\boldsymbol{E(2\,;0\,;1)}$.

5. La droite D est orthogonale au plan P est passe par le point F. De plus, le point E est le point d'intersection de la droite D et du plan P. Ainsi, le point E est le projeté orthogonal du point F sur le plan P.
Donc, la distance du point F au plan P est la distance EF.
$\overrightarrow{EF}(x_F - x_E\ ; y_F - y_E\ ; z_F - z_E)$ $\quad \overrightarrow{EF}(13\ ;\ -16\ ;\ -9)$
Ainsi, $EF = \|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{13^2 + (-16)^2 + (-9)^2} = \sqrt{506}$ unités de longueur.
Ainsi, **la distance du point F au plan P est de $\sqrt{506}$ unités de longueur.**

6. Soit M un point quelconque de la droite D. Ainsi, pour tout réel t,
$M(15 + 13t\ ; -16 - 16t\ ;\ -8 - 9t)$
De plus, la droite D est orthogonale au plan P et le point E est le point d'intersection du plan P et de la droite D. Comme tout point M appartient à la droite D, le point E est le projeté orthogonal du point M sur le plan P pour tout point M.
On cherche donc les points M tels que $ME = \frac{\sqrt{506}}{2}$
Pour tout réel t, $\overrightarrow{ME}(x_E - x_M\ ; y_E - y_M\ ; z_E - z_M)$
$\overrightarrow{ME}(2 - (15 + 13t)\ ;\ -(-16 - 16t); \big(1 - (-8 - 9t)\big)$
$\overrightarrow{ME}(-13 - 13t\ ; 16 + 16t\ ; 9 + 9t)$
$ME = \|\overrightarrow{ME}\| = \sqrt{(-13 - 13t)^2 + (16 + 16t)^2 + (9 + 9t)^2} =$
$\sqrt{169 + 338t + 169t^2 + 256 + 512t + 256t^2 + 81 + 162t + 81t^2}$
$= \sqrt{506t^2 + 931t + 506}$

Ainsi, pour tout réel t, $ME = \frac{\sqrt{506}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{506t^2 + 1012t + 506} = \frac{\sqrt{506}}{2}$
$\Leftrightarrow 506t^2 + 1012t + 506 = 126{,}5 \Leftrightarrow 506t^2 + 1012t + 379{,}5$

$t \mapsto 506t^2 + 1012t + 379{,}5$ est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 506\ ; b = 1012$ et $c = 379{,}5$.
Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 1012^2 - 4 \times 506 \times 379{,}5 = 256036$
$\Delta > 0$ donc 2 solutions.
$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1012-\sqrt{256036}}{2\times 506} = \frac{-1012-506}{1012} = -1{,}5$
Et $t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1012+\sqrt{256036}}{2\times 506} = \frac{-1012+506}{1012} = -0{,}5$

Ainsi, les points recherchés sont le point de la droite D de paramètre $-1{,}5$ et le point de la droite D de paramètre $-0{,}5$. On note respectivement M_1 et M_2 ces points.
Ainsi, on a : $\begin{cases} x_{M_1} = 15 + 13 \times (-1{,}5) = -4{,}5 \\ y_{M_1} = -16 - 16 \times (-1{,}5) = 8 \\ z_{M_1} = -8 - 9 \times (-1{,}5) = 5{,}5 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_{M_2} = 15 + 13 \times (-0{,}5) = 8{,}5 \\ y_{M_2} = -16 - 16 \times (-0{,}5) = -8 \\ z_{M_2} = -8 - 9 \times (-0{,}5) = -3{,}5 \end{cases}$

Ainsi, **les points de la droite D dont la distance au plan P est égale à la moitié de la distance du point F au plan P sont les points $M_1(-4{,}5\ ; 8\ ; 5{,}5)$ et $M_2(8{,}5\ ;\ -8\ ; -3{,}5)$.**