

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**SESSION 2023**

## MATHÉMATIQUES

**JOUR 2**

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.  
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.*

### Exercice 1 (5 points)

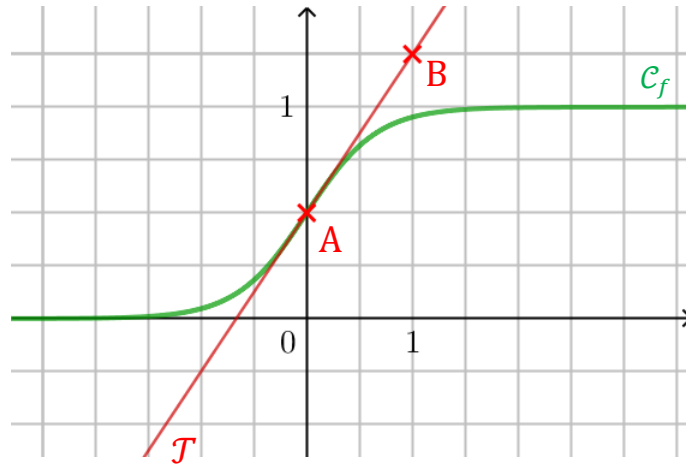
On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-3x}}$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées  $(0; \frac{1}{2})$  et B le point de coordonnées  $(1; \frac{5}{4})$ .

On a tracé ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}_f$ , et  $\mathcal{T}$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.



#### Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente  $\mathcal{T}$ .
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction  $f$  semble convexe ou concave.

#### Partie B : étude de la fonction

1. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée  $f'$ .
2. Justifier que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
3. a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$ .  
b. Déterminer la limite en  $-\infty$  de la fonction  $f$ .
4. Déterminer la valeur exacte de la solution  $\alpha$  de l'équation  $f(x) = 0,99$ .

## Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $f''$  la fonction dérivée seconde de la fonction  $f$ .

On admet que  $f''$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f''(x) = \frac{9e^{-3x}(e^{-3x} - 1)}{(1 + e^{-3x})^3}$$

2. Étudier le signe de la fonction  $f''$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. **a.** Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction  $f$  est convexe.  
**b.** Que représente le point A pour la courbe  $\mathcal{C}_f$  ?
4. En déduire la position relative de la tangente  $\mathcal{T}$  et de la courbe  $\mathcal{C}_f$ . Justifier la réponse.

## Exercice 2 (5 points)

### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x)$$

1. Justifier que la fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$ .
2. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $] -1 ; +\infty[$ .  
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée  $f'$ .
3. **a.** En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$ .  
**b.** En déduire le signe de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$ .
4. **a.** Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$ , on a :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right).$$

- b.** En déduire la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$ .

### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 10$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n).$$

On admet que la suite  $(u_n)$  est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millième de  $u_1$ .
2. En utilisant la question **3.a.** de la **partie A**, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \geq 0$ .
3. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
4. Déduire des questions précédentes que la suite  $(u_n)$  converge.
5. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Exercice 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(3; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$  et  $C(-2; -5; 1)$ .

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$$-x + y - 2z + 5 = 0$$

4. On considère le point  $S(1; -2; 4)$ .  
Déterminer la représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$ , passant par S et orthogonale au plan (ABC).
5. On appelle H le point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et du plan (ABC).  
Montrer que les coordonnées de H sont  $(0; -1; 2)$ .
6. Calculer la valeur exacte de la distance SH.
7. On considère le cercle  $\mathcal{C}$ , inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle  $\mathcal{D}$  le disque délimité par le cercle  $\mathcal{C}$ .  
Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque  $\mathcal{D}$ .
8. En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque  $\mathcal{D}$ .

### Exercice 4 (5 points)

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.*

*Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

*Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*

*Les cinq questions sont indépendantes.*

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

On choisit au hasard  $n$  pièces produites par la chaîne de fabrication. Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.

Dans les trois questions suivantes, on prend  $n = 50$ .

1. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, de tirer au moins une pièce défectueuse ?
  - a. 1
  - b. 0,870
  - c. 0,600
  - d. 0,599
  
2. La probabilité  $p(3 < X \leq 7)$  est égale à :
  - a.  $p(X \leq 7) - p(X > 3)$
  - b.  $p(X \leq 7) - p(X \leq 3)$
  - c.  $p(X < 7) - p(X > 3)$
  - d.  $p(X < 7) - p(X \geq 3)$
  
3. Quel est le plus petit entier naturel  $k$  tel que la probabilité de tirer au plus  $k$  pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ?
  - a. 2
  - b. 3
  - c. 4
  - d. 5

Dans les questions suivantes,  $n$  ne vaut plus nécessairement 50.

4. Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ?
  - a.  $0,04^n$
  - b.  $0,96^n$
  - c.  $1 - 0,04^n$
  - d.  $1 - 0,96^n$
  
5. On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle ?

```
def seuil(x):  
    n = 1  
    while 1-0.96**n < x :  
        n = n + 1  
    return n
```

- a. Le plus petit nombre  $n$  tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à  $x$ .
- b. Le plus petit nombre  $n$  tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à  $x$ .
- c. Le plus grand nombre  $n$  tel que la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses soit supérieure ou égale à  $x$ .
- d. Le plus grand nombre  $n$  tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à  $x$ .