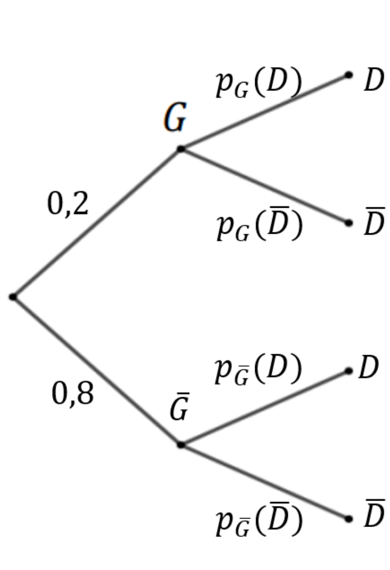
Mathématiques - Métropole 1 - 2023

Merci d'adresser vos éventuelles remarques à `anthony.le.bihan@icloud.com`. Je ne réponds pas aux questions.

Exercice 1 (5 points)

D'après les données, on peut à l'avance établir l'arbre pondéré suivant :



On sait de plus que $p(G \cap D) = 0,002$ et $p(D) = 0,082$.

1. Par définition d'une probabilité conditionnelle : $p_G(D) = \dfrac{p(G \cap D)}{p(G)} = \dfrac{0,2}{20} = 0,01$. **La réponse est B.**
2. Puisque $(G, \bar{G})$ forme un système complet d'événements (ou une partition de l'univers), la formule des probabilités totales nous dit que :

$$p(D) = p(D \cap G) + p(D \cap \bar{G}) \implies p(D \cap \bar{G}) = p(D) - p(D \cap G) = 0,082 - 0,002 = 0,08$$

   La réponse est B.
3. On cherche $p_D(G)$. Par définition d'une probabilité conditionnelle : $p_D(G) = \dfrac{p(G \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,2}{8,2} = 0,0244 \simeq 0,024$. **La réponse est B.**
4. D'après le cours sur les lois binomiales, si $X \sim \mathcal{B}(50; 0,082)$, alors $p(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ici, en utilisant les événements contraires :

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$$

   car $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, 50\}$. Arrivé ici, il y a 2 possibilités. Soit on utilise la calculatrice et :
   — fonction de partition pour $X = 0$, $X = 1$ et $X = 2$
   — fonction de répartition pour $X \leq 2$
   Dans les deux cas, on trouve $P(X > 2) \simeq 0,78858 \simeq 0,789$. Ainsi,

$$P(X > 2) = 1 - (1 - 0,082)^{50} - 50 \times 0,082 \times (1 - 0,082)^{49} = 0,78858 \simeq 0,789$$

   La réponse est B.
5. On cherche désormais n tel que $p(X = 0) > 0,4$ où $X \sim \mathcal{B}(n; 0,082)$. Or,

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,082^0 \times (1 - 0,082)^n = (1 - 0,082)^n$$

   On doit donc résoudre : $(1 - 0,082)^n > 0,4$.

$$(1 - 0,082)^n > 0,4 \iff n \log(1 - 0,082) > \log(0,4)$$

par application de la fonction log, strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$. Ainsi,

$$n\log(0,918) > \log(0,4) \iff n < \frac{\log(0,4)}{\log(0,918)} \quad \text{changement du sens de l'inégalité car log(0,918)<0}$$

Après calculs, $n < 10,7 \iff n \leq 10$. **La réponse est C.**

Exercice 2

$$\begin{array}{cccc} f & : &]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 - 8\ln(x) \end{array}$$

1. Par le cours sur les limites de fonctions usuelles, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc par opérations sur les limites
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 - 8\times(-\infty) = +\infty$$
2. Par le cours sur les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$. Donc, par opérations sur les limites
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \times (1 - 8\times 0) = +\infty$$
3. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc en dérivant terme à terme l'expression première de f, il vient que
$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{8}{x} = \frac{2x^2-8x}{x} = \frac{2(x^2-4)}{x}$$
4. On étudie successivement le signe du numérateur et du dénominateur de f' pour en déduire son signe :

x	0		2		$+\infty$
$2(x^2-4)$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec $f(2) = 4 - 8\ln(2) = 4(1-\ln(4)) \simeq -1,54$.

5. On sait que :
   — f est continue sur $]0;2]$
   — f est strictement décroissante sur $]0;2]$
   — $[f(2), f(0)[= [4-8\ln(2); +\infty[$ et donc $0 \in [f(2), f(0)[$
   d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;2]$.
6. A partir des 2 questions précédentes, on peut déduire le tableau de signe de f :

x	0		α		β		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

7. On a finalement $\forall x \in]0;+\infty[, g_k(x) = f(x)+k$. On peut tout simplement retracer le tableau de variations de g_k à partir de celui de f :

x	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$ $+\infty$
$g_k(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$f(2)+k$	$\nearrow$ $+\infty$

Il suffit juste de "décaler de k". Et on veut donc g_k positive c'est-à-dire $f(2)+k \geq 0 \iff k \geq -f(2)$. La plus petite valeur de k telle que g_k reste positive est $8\ln(2) - 4$.

Exercice 3

Première modélisation

1. $u_2 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 4$ et $u_3 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 4,9$. Au 2ème mois de la FAQ, la modélisation prévoit 400 questions et au 3ème mois elle en prévoit 490.
2. Notons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ la propriété "$u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$".
   Initialisation : $u_1 = 3$ et $13 - \frac{100}{9} \times 0,9 = 13 - 10 = 3$. Donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
   Hérédité : soit $N \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}(N)$ est vraie, *i.e.* $u_N = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^N$. Montrons $\mathcal{H}(N+1)$. On part de la définition de la suite
   $$u_{N+1} = 0,9u_N + 1,3 = 0,9 \times \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^N\right) + 1,3 = 11,7 - \frac{100}{9} \times 0,9^{N+1} + 1,3 = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{N+1}$$
   C'est $\mathcal{H}(N+1)$!
   Conclusion : on a prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.
   La propriété est démontrée par principe de récurrence.
3. $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{100}{9} \times (0,9^{n+1} - 0,9^n) = \dfrac{100}{9} \times 0,9^n \times (1 - 0,9) = \dfrac{10}{9} \times 0,9^n = 0,9^{n-1} \geq 0$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante.
4. Ce programme renvoie le premier rang N tel que $u_N > p$. Dans le cas présent,
   $$u_n > 8,5 \iff 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n > 8,5 \iff \frac{100}{9} \times 0,9^n < 4,5 \iff 0,9^n < 4,5 \times 0,09 \iff 0,9^n < 0,405$$
   Par application du log strictement croissant sur $\mathbb{R}_*^+$,
   $$n \log(0,9) < \log(0,405) \iff n > \frac{\log(0,405)}{\log(0,9)} \iff n > 8,57$$
   Le programme renvoie donc $N = 9$.

Une autre modélisation

1. $v_1 = 9 - 6 = 3,00$ et $v_2 = 9 - 6e^{-0,19} \simeq 4,04$.
2. On cherche n tel que $v_n = 8,5$:
   $$9 - 6e^{-0,19(n-1)} = 8,5 \iff e^{-0,19(n-1)} = \frac{0,5}{6} \iff -0,19(n-1) = -\ln(12) \iff n = 1 + \frac{\ln(12)}{0,19}$$
   On trouve après calculs $n = 15$.

Comparaison des deux modèles

1. Il s'agit de comparer les questions A.4. et B.2. . La première modélisation dépasse les 850 questions au 9ème mois alors que la deuxième ne les dépasse qu'au 15ème mois. La première modélisation conduit donc à la modification la plus prématurée.
2. Il s'agit en fait de calculer les limites des deux suites (u_n) et (v_n). Le cours sur les suites géométriques nous assure que pour $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Donc par opérations sur les limites

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0 = 13$$

De plus, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(-n) = 0$ donc par opérations sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 9 - 6 \times 0 = 9$$

La 1ère modélisation prévoit le plus de questions : au maximum 1300 alors que la 2ème modélisation n'en prévoit que 900.

Exercice 4

1. $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. Il faut un point appartenant et (EC) : on a $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Il faut également un vecteur directeur de (EC) : on a $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Une représentation paramètre de (EC) est donc

$$\begin{cases} x &= 0 + 1t \\ y &= 0 + 1t \\ z &= 1 - 1t \end{cases} \implies \begin{cases} x &= t \\ y &= t \\ z &= 1 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}0-1\\1-1\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ sont 2 vecteurs directeurs du plan (GBD) et $\overrightarrow{EC}$ est un vecteur directeur de la droite (EC). Or,

$$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{EC} = 1 \times 0 - 1 \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$$

De même,

$$\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{EC} = 1 \times (-1) + 0 \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$$

Ainsi, $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GD}$ donc (EC) est orthogonal au plan (GBD).

4a. Un vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ suffit généralement à caractériser un plan. Dans ce cas, l'équation cartésienne du plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
Puisque (EC) est orthogonale à (BDG), $\overrightarrow{EC}$ est un vecteur normal à (BCG). Donc l'équation cartésienne de (BDG) est de la forme $1x + 1y - 1z + d = 0$. Il reste à déterminer d. On sait qu'un point qui appartient au plan vérifie les coordonnées du plan. Or, $B \in (BDG)$ donc

$$x_B + y_B - z_B + d = 0 \implies 1 + 0 + 0 + d = 0 \implies d = -1$$

Donc une équation cartésienne de (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

4b. I est l'intersection de (BDG) est de (EC). Il vérifie à la fois l'équation cartésienne de (BDG) et l'équation paramétrique de (EC). Ainsi,

$$\begin{cases} x_B + y_B - z_B - 1 &= 0 \\ x_B &= t_B \\ y_B &= t_B \\ z_B &= 1 - t_B \end{cases} \implies \begin{cases} t_B + t_B + t_B - 1 &= 0 \\ x_B &= t_B \\ y_B &= t_B \\ z_B &= 1 - t_B \end{cases} \implies \begin{cases} 3t_B &= 2 \\ x_B &= t_B \\ y_B &= t_B \\ z_B &= 1 - t_B \end{cases} \implies t_B = \frac{2}{3}$$

Les coordonnées de I sont donc $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

4c. Un schéma permet de se rendre compte que $d(E;GBD) = ||\overrightarrow{EI}||EI$. Or, $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}2/3-0\\2/3-0\\1/3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$

Donc,

$$EI = \sqrt{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

5a. Pour montrer que BDG est équilatéral, il suffit de montrer que ses 3 côtés sont de même longueur. On calcule donc la norme des vecteurs associés aux 3 côtés : $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{2}$, $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{2}$ et $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{2}$. Donc BDG est équilatéral de côté $\sqrt{2}$.

5b. Géométriquement, on a :

$$\mathcal{A}_{BDG} = 2\mathcal{A}_{BJG}$$

Or, BJG est un triangle rectangle en J grâce aux propriétés sur les triangles équilatéraux. Donc en appliquant le théorème de Pythagore dans BJG, on trouve :

$$JG^2 + JB^2 = BG^2 \implies JG = \sqrt{BG^2 - JB^2} = \sqrt{2-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

car $JB = DB/2 = \sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$. Donc l'aire du triangle BJG est :

$$\mathcal{A}_{BJG} = \frac{JG\times JB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \text{(moitié de l'aire d'un rectangle)}$$

Et donc,

$$\mathcal{A}_{BDG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. Le tétraèdre EGBD a pour base BDG et pour hauteur relative EI. Donc,

$$\mathcal{V}_{EBD} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{BDG}\times EI = \frac{\sqrt{3}\times 2}{3\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$