CORRECTION DU BAC : SUJET DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

METROPOLE – ANTILLES – GUYANE 2023 – JOUR 2

Exercice 1 : QCM sur les probabilités

D'après l'énoncé : $P(A) = \frac{2}{5}$ $\quad P_A(G) = \frac{7}{10}$ $\quad$ et $\quad P(G) = \frac{12}{25}$

1. On calcule la probabilité que le joueur choisisse le monde et gagne la partie, soit $P(A \cap G)$.
   $P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$ **Réponse c**

2. On calcule $P_B(G)$.
   $P_B(G) = \frac{P(B\cap G)}{P(B)} = \frac{P(B\cap G)}{1-P(A)}$
   Or, d'après la formule des probabilités totales, $P(G) = P(B \cap G) + P(A \cap G)$
   Soit, $P(B \cap G) = P(G) - P(A \cap G) = \frac{12}{25} - \frac{7}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.
   Donc, $P_B(G) = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$ **Réponse b**

3. Jouer une partie est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « le joueur gagne la partie » de probabilité $\frac{12}{25}$.
   On répète 10 fois cette épreuve de façon identique et indépendante (on assimile la situation à un tirage avec remise). On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{12}{25}$.
   On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le nombre de parties gagnées). X suit donc la loi binomiale $B\left(10\,;\frac{12}{25}\right)$.
   On calcule $P(X = 6)$.
   $P(X = 6) = \binom{10}{6} \times \left(\frac{12}{25}\right)^6 \times \left(\frac{13}{25}\right)^4 = 210 \times \left(\frac{12}{25}\right)^6 \times \left(\frac{13}{25}\right)^4 \approx 0{,}188$ au millième près
   Réponse c

4. On programme sur la calculatrice la fonction $BinomialCD\left(X, 10, \frac{12}{25}\right)$.
   D'après la calculatrice, $P(X \leq 3) \approx 0{,}207$. Donc l'entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, de gagner au plus n parties est de 0,207 est 3.
   Réponse b

5. On calcule $P(X \geq 1)$.
   $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times \left(\frac{12}{25}\right)^0 \times \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$
   $P(X \geq 1) = 1 - 1 \times 1 \times \left(\frac{13}{25}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$ **Réponse d**

<u>Exercice 2 :</u> Suites

Partie A : Etude d'un premier modèle en laboratoire

1. Chaque mois, la population d'insectes dans le jardin botanique augmente de 60%, elle est donc multipliée par 1,6.
   Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}6u_n$.
   Donc, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}6$ et de premier terme $u_0 = 0{,}1$. Donc, pour tout entier naturel, $u_n = u_0 \times q^n$ soit $\boldsymbol{u_n = 0{,}1 \times 1{,}6^n}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}6^n = +\infty$ car $1{,}6 > 1$. Donc, par produit, $\lim\limits_{\boldsymbol{n\to+\infty}} \boldsymbol{u_n} = +\infty$

3. On cherche n tel que $u_n > 0{,}4$. Pour tout entier naturel n, $u_n > 0{,}4 \Leftrightarrow 0{,}1 \times 1{,}6^n > 0{,}4 \Leftrightarrow 1{,}6^n > 4 \Leftrightarrow \ln 1{,}6^n > \ln 4$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$.

   $\Leftrightarrow n\ln 1{,}6 > \ln 4 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 4}{\ln 1{,}6}$ car $1{,}6 > 1$ donc $\ln 1{,}6 > 0$

   Or, $\frac{\ln 4}{\ln 1{,}6} \approx 2{,}95$ donc $n \geq 3$. Ainsi, **le plus petit entier naturel $\boldsymbol{n}$ tel que $\boldsymbol{u_n > 0{,}4}$ est 3.**

4. D'après la question précédente, la population d'insectes dans le jardin botanique dépassera les 0,4 million d'insectes, soit 400 000 insectes au bout de 3 mois. Ainsi, selon ce modèle, **l'équilibre du milieu naturel sera préservé.**

Partie B : Etude d'un second modèle

1. On calcule v_1.
   $v_1 = 1{,}6v_0 - 1{,}6v_0^2 = 1{,}6 \times 0{,}1 - 1{,}6 \times 0{,}1^2 = 0{,}144$
   Ainsi, **au bout d'un mois, il y aura 0,144 million, soit 144 000 insectes dans le jardin botanique.**

2. **a.** Pour tout $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $f(x) = x \Leftrightarrow 1{,}6x - 1{,}6x^2 - x = 0 \Leftrightarrow 0{,}6x - 1{,}6x^2 = 0 \Leftrightarrow x(0{,}6 - 1{,}6x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou\ 0{,}6 - 1{,}6x = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = 0{,}375$
   $\boldsymbol{S = \{0\,;0{,}375\}}$

   b. Dérivons f afin de trouver ses variations.
   La fonction f est dérivable sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ comme fonction polynôme du second degré.
   Pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $f'(x) = 1{,}6 - 3{,}2x$
   Pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1{,}6 - 3{,}2x \geq 0 \Leftrightarrow 1{,}6 \geq 3{,}2x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.
   Ainsi, pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0$ donc **la fonction $\boldsymbol{f}$ est croissante sur $\boldsymbol{\left[0;\frac{1}{2}\right]}$.**

3. **a.** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
Initialisation : $v_0 = 0{,}1$ et $v_1 = 0{,}144$ or $0 \leq 0{,}1 \leq 0{,}144 \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \frac{1}{2}$.
La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier naturel k, $0 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq \frac{1}{2}$ et montrons qu'alors $0 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq \frac{1}{2}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq \frac{1}{2}$
La fonction f est croissance sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ donc elle conserve l'ordre donc, on a :
$f(0) \leq f(v_k) \leq f(v_{k+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$.
Or, par définition, $f(v_k) = v_{k+1}$ et $f(v_{k+1}) = v_{k+2}$. De plus, $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}4$ et $0{,}4 \leq \frac{1}{2}$. On a donc : $0 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 0{,}4 \leq \frac{1}{2}$ soit $0 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq \frac{1}{2}$.
La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}}$.

b. D'après la question précédente, la suite (v_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, **la suite (v_n) est convergente vers $l \leq \frac{1}{2}$.**

c. On sait que l est solution de l'équation $f(x) = x$. Donc, d'après la question 2-a, on a $l = 0$ ou $l = 0{,}375$. Or, la suite (v_n) est croissante et $v_0 = 0{,}1 > 0$ donc l ne peut être égale à 0. Ainsi, **la limite l de la suite (v_n) est 0,375.**
Ainsi, à long terme, la population d'insectes dans le jardin botanique va se rapprocher de 0,375 million d'individus, soit 375 000 insectes, et, comme la suite (v_n) est croissante, elle ne les dépassera pas. Ainsi, cette population n'atteindra jamais 400 000 insectes. Donc, **selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera respecté**.

4. **a.** Cet algorithme renvoie le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geq a$. Or, d'après la question précédente, la suite (v_n) ne dépasse jamais la valeur 0,4 car la population d'insectes ne dépasse pas les 400 000 individus. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n < 0{,}4$, donc **la saisie de « seuil(0.4) » ne renvoie rien.**

b. La saisie de « seuil(0.35) » renvoie le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geq 0{,}35$. D'après la calculatrice, $v_5 < 0{,}35$ et $v_6 > 0{,}35$. Donc, **la saisie de « seuil(0.35) » renvoie la valeur 6.** Ainsi, **la population d'insectes dépassera les 0,35 million d'individus, soit 350 000 insectes au bout du sixième mois.**

<u>Exercice 3 :</u> Géométrie dans l'espace

1. **a.** D'après son équation cartésienne, le plan P_1 a pour vecteur normal $\boldsymbol{\overrightarrow{n_1}(2;1;-1)}$.

   b. Vérifions si les vecteurs normaux aux plans P_1 et P_2 sont orthogonaux.
   $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 2\times 1 + 1\times(-1) + (-1)\times 1 = 2-1-1 = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux donc **les plans $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$ sont perpendiculaires.**

2. **a.** Le plan P_2 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1;-1;1)$, donc le plan P_2 a pour équation cartésienne : $x-y+z+d$ où d est un réel.
   De plus, $B(1\,;1\,;2)\in P_2$, donc
   $x_B - y_B + z_B + d = 0 \Leftrightarrow 1-1+2+d = 0 \Leftrightarrow d = -2$
   Donc, le plan P_2 a pour équation cartésienne : $\boldsymbol{x-y+z-2}$.

   b. Soit M un point quelconque de la droite Δ. Ainsi, pour tout réel t, $M(0;-2+t;t)$.
   Vérifions que $M\in P_1$.
   Pour tout réel t, $2x_M + y_M - z_M + 2 = 2\times 0 + (-2) + t - t + 2 = 0$. Donc le point M appartient au plan P_1 donc la droite Δ est incluse dans le plan P_1.
   Vérifions si $M\in P_2$.
   Pour tout réel t, $x_M - y_M + z_M - 2 = 0-(-2+t)+t-2 = 2-t+t-2 = 0$.
   Donc le point M appartient au plan P_2 donc la droite Δ est incluse dans le plan P_2.
   Ainsi, la droite Δ est incluse dans le plan P_1 et dans le plan P_2. Ainsi, **la droite Δ est la droite d'intersection des plans $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$.**

3. **a.** Pour tout réel t, $\overrightarrow{AM_t}(x_{M_t}-x_A\,;y_{M_t}-y_A\,;z_{M_t}-z_A)$ $\overrightarrow{AM_t}(-1\,;\,-2+t-1;t-1)$. $\overrightarrow{AM_t}(-1\,;t-3\,;t-1)$
   Donc pour tout réel t, $AM_t = \left\|\overrightarrow{AM_t}\right\| = \sqrt{(-1)^2+(t-3)^2+(t-1)^2}$
   $AM_t = \sqrt{1+t^2-6t+9+t^2-2t+1} = \boldsymbol{\sqrt{2t^2-8t+11}}$

   b. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = AM_t^2 = \left(\sqrt{2t^2-8t+11}\right)^2 = 2t^2-8t+11$.
   Le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ. Ainsi, H est le point de la droite Δ tel que la distance AM_t est minimale. On étudie donc les variations de la fonction f.
   f est une fonction polynôme de degré 2 avec $a=2\,;b=-8$ et $c=11$.
   Donc on a : $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{2\times 2} = \frac{8}{4} = 2$
   Et $\beta = f(\alpha) = f(2) = 2\times 2^2 - 8\times 2 + 11 = 3$
   $a = 2 > 0$ donc, on a :

t	$-\infty$		2		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	3	$\nearrow$	

Ainsi, f admet pour minimum 3. Donc, la valeur minimale de AM_t^2 est 3, donc la valeur minimale de AM_t est $\sqrt{3}$, AM_t étant une longueur qui est donc positive. Ainsi, on peut en déduire que $\boldsymbol{AH = \sqrt{3}}$**.**

4. a. La droite D_1 est orthogonale au plan P_1 donc elle a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan P_1. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n_1}(2\,;1\,;\,-1)$ est un vecteur directeur de la droite D_1 qui passe par le point $A(1\,;1\,;1)$.

La droite D_1 a donc pour représentation paramétrique : $\boldsymbol{\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}}$**.**

b. La droite D_1 est orthogonale au plan P_1 et passe par le point A. Ainsi, le projeté orthogonal H_1 du point A sur la droite D_1 est le point d'intersection de la droite D_1 et du plan P_1. Donc, les coordonnées de H_1 vérifient :

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 + 2k) + 1 + k - (1 - k) + 2 = 0 \\ x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 + 4k + 1 + k - 1 + k + 2 = 0 \\ x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6k + 4 = 0 \\ x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k = -\frac{2}{3} \\ x = 1 + 2k = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} \\ y = 1 + k = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = 1 - k = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \end{cases} \quad \text{donc } \boldsymbol{H_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)}.$$

5. Montrons que le quadrilatère AH_1HH_2 est un rectangle.
Montrons d'abord que ce quadrilatère est un parallélogramme.

$\overrightarrow{HH_1}(x_{H_1} - x_H; y_{H_1} - y_H; z_{H_1} - z_H)$ $\overrightarrow{HH_1}\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{H_2A}(x_A - x_{H_2}; y_A - y_{H_2}; z_A - z_{H_2})$ $\overrightarrow{H_2A}\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

On remarque : $\overrightarrow{HH_1} = \overrightarrow{H_2A}$. Ainsi, le quadrilatère AH_1HH_2 est un parallélogramme.

Montrons maintenant que le quadrilatère AH_1HH_2 est un rectangle. Pour cela, montrons qu'il a deux côtés consécutifs perpendiculaires.

$\overrightarrow{AH_1}(x_{H_1} - x_A\,; y_{H_1} - y_A\,; z_{H_1} - z_A)$ $\overrightarrow{AH_1}\left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Donc, $\overrightarrow{AH_1}\,.\,\overrightarrow{H_2A} = -\frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AH_1}$ et $\overrightarrow{H_2A}$ sont orthogonaux, donc les droites (AH_1) et (H_2A) sont perpendiculaires, donc le parallélogramme AH_1HH_2 a deux côtés consécutifs perpendiculaires, donc **le quadrilatère $\boldsymbol{AH_1HH_2}$ est un rectangle**.

<u>Exercice 4 :</u> Fonctions

1. **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^{-x})=+\infty$
Or, $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ donc par composition $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$**.**

   b. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x})=1$
Or, $\lim\limits_{X\to1}\ln X=\ln 1=0$ donc par composition $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$**.**
Ainsi, **la courbe $\boldsymbol{C}$ admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $\boldsymbol{y=0}$ en $\boldsymbol{+\infty}$.**

   c. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On pose : $f=\ln u$ avec $u(x)=1+e^{-x}$
Donc $f'=\frac{u'}{u}$ avec $u'(x)=-e^{-x}$
Pour tout réel x, $\boldsymbol{f'(x)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{-e^{-x}}{e^{-x}(e^{x}+1)}=\frac{-1}{1+e^{x}}}$

   d. Pour tout réel x, $e^{x}>0$ donc $1+e^{x}>1>0$ et $-1<0$ donc par quotient, $f'(x)<0$.
Donc, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
On a donc :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$+\infty$
Variations de $\boldsymbol{f}$	$+\infty$	↘	**0**

2. **a.** <u>Equation de T_0 :</u> $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y=f'(0)x+f(0)$
Or, $f'(0)=\frac{-1}{1+e^{0}}=-\frac{1}{2}$ et $f(0)=\ln(1+e^{-0})=\ln 2$
Donc, T_0 a pour équation : $\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\ln 2}$**.**

   b. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de -1 par la somme de 1 et de la fonction exponentielle (qui ne s'annule donc pas).
Pour tout réel x, $f''(x)=\frac{-1\times(-e^{x})}{(1+e^{x})^2}=\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}$
Or, pour tout réel x, $e^{x}>0$ et $(1+e^{x})^2>0$ donc par quotient, $f''(x)>0$ donc **la fonction $\boldsymbol{f}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.**

   c. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$ donc la courbe C est au-dessus de ses tangentes, et en particulier de T_0. Ainsi, pour tout réel x, $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+\ln 2\right)\geq 0$
soit $\boldsymbol{f(x)\geq-\frac{1}{2}x+\ln 2}$

3. a. Pour tout réel x, $f(x) - f(-x) = \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^{x}) = \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1+e^{x}}\right)$

$\boldsymbol{f(x) - f(-x) = \ln\left(\frac{e^{-x}(e^{x}+1)}{1+e^{x}}\right) = \ln e^{-x} = -x}$

b. Déterminons le coefficient directeur de T_0 et de (M_aN_a)

T_0 est la tangente à C au point d'abscisse 0 donc son coefficient directeur est $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Calculons le coefficient directeur m de la droite (M_aN_a).

Pour tout réel a, $m = \frac{y_{N_a} - y_{M_a}}{x_{N_a} - x_{M_a}} = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$ car pour tout réel x, $f(x) - f(-x) = -x$.

Ainsi, les droites T_0 et (M_aN_a) ont le même coefficient directeur donc **elles sont parallèles.**