Corrigé du bac général 2024
Spécialité Mathématiques – Amérique du Sud – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un enseignant en mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. On cherche une solution particulière de la forme : $g(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$

On calcule la dérivée :

$$g'(x) = ae^{-\frac{1}{4}x} + ax\left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}\right) = ae^{-\frac{1}{4}x} - \frac{a}{4}xe^{-\frac{1}{4}x}$$

Donc :

$$g'(x) + \frac{1}{4}g(x) = ae^{-\frac{1}{4}x} - \frac{a}{4}xe^{-\frac{1}{4}x} + \frac{1}{4}\cdot axe^{-\frac{1}{4}x} = ae^{-\frac{1}{4}x}$$

On veut que ce soit égal à $20e^{-\frac{1}{4}x}$, donc : $a = 20$

Donc une solution particulière est : $g(x) = 20xe^{-\frac{1}{4}x}$

2. On résout l'équation homogène associée : $(E'): y' + \frac{1}{4}y = 0$

C'est une équation linéaire du premier ordre, à coefficients constants. La solution générale est : $y(x) = Ce^{-\frac{1}{4}x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions de (E) sont les sommes : $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Avec $y_h(x) = Ce^{-\frac{1}{4}x}$ et $y_p(x) = 20xe^{-\frac{1}{4}x}$

Donc la solution générale de (E) est : $y(x) = (20x + C)e^{-\frac{1}{4}x}$

4. On cherche $f(x) = (20x + C)e^{-\frac{1}{4}x}$ telle que $f(0) = 8$

$$\Leftrightarrow f(0) = (20 \cdot 0 + C) \cdot 1 = C = 8$$

Donc :

$$f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}$$

Partie B

1.a On dérive $f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}$

C'est un produit, donc on applique la règle : $f'(x) = (20x+8)' \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + (20x+8) \cdot \left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}\right)$

Soit : $f'(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{4}(20x+8)e^{-\frac{1}{4}x} = \left(20 - \frac{1}{4}(20x+8)\right)e^{-\frac{1}{4}x}$

On simplifie l'expression dans les parenthèses : $\frac{1}{4}(20x+8) = 5x+2$ $20-(5x+2) = 18-5x$

Donc : $f'(x) = (18-5x)e^{-\frac{1}{4}x}$

1.b Le signe de $f'(x)$ est donné par le facteur $18-5x$, car $e^{-\frac{1}{4}x} > 0$ pour tout $x \geq 0$

- $f'(x) > 0$ si $x < \frac{18}{5} = 3{,}6$
- $f'(x) = 0$ si $x = 3{,}6$
- $f'(x) < 0$ si $x > 3{,}6$

Donc, f est croissante sur $[0\,;3{,}6]$, décroissante sur $[3{,}6\,;+\infty[$.

Valeur maximale atteinte en $x = 3{,}6$:

$$f(3{,}6) = (20 \cdot 3{,}6 + 8)e^{-\frac{1}{4} \cdot 3{,}6} = (72+8)e^{-0{,}9} = 80e^{-0{,}9}$$

Tableau de variations :

x	0		3,6		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	8	↗	$80e^{-0{,}9}$	↘	0

2.a On cherche à savoir si l'équation $f(x) = 8$ a une unique solution dans $[14\,;15]$.

Or $f(x) = (20x+8)e^{-\frac{1}{4}x}$ est strictement décroissante sur $[3{,}6\,;+\infty[$.

Donc, sur $[14\,;15]$, f est strictement décroissante. Cela garantit qu'elle ne coupe la droite $y = 8$ qu'une seule fois (si elle le fait).

On calcule les valeurs aux bornes :

- $f(14) = (20 \cdot 14 + 8)e^{-3{,}5} = 288e^{-3{,}5} \approx 8{,}69$
- $f(15) = (20 \cdot 15 + 8)e^{-3{,}75} = 308e^{-3{,}75} \approx 7{,}24$

On constate : $f(14) > 8 > f(15)$

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution $\alpha \in [14; 15]$ à $f(x) = 8$.

2.b On utilise la méthode de dichotomie, comme dans l'algorithme Python fourni.

a	14	14	14,25	14,375	14,4375
b	15	14,5	14,5	14,5	14,5
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	14,5	14,25	14,375	14,4375	
Condition $f(m) > 8$	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	

2.c L'objectif de la fonction solution_equation() est de déterminer une valeur approchée de la solution α de l'équation $f(x) = 8$ par méthode de dichotomie, avec une précision de 0,1. Elle retourne un encadrement $[a; b]$ tel que $\alpha \in [a; b]$ et $b - a \leq 0{,}1$

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A

1.a On suppose qu'on a pioché une boule blanche dans U1 (il y en a 6 sur 10). On la met dans U2, qui contient alors :

- 1 boule noire
- 3 + 1 = 4 boules blanches

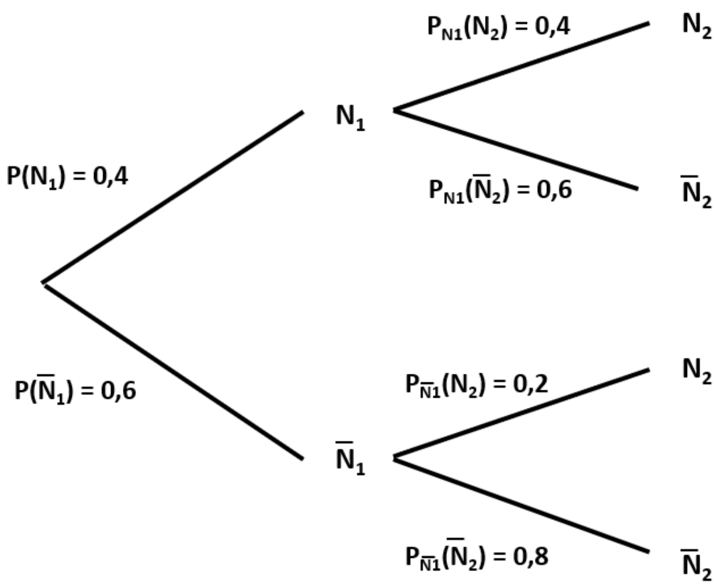
Donc : $P(N2 \mid \overline{N1})$ = probabilité de tirer une boule noire dans U2 = $\frac{1}{5} = 0{,}2$

1.b On complète l'arbre de probabilités :

- $P(N1)$ = 4/10 = 0,4
- $P(\overline{N1})$ = 6/10 = 0,6

Si on a mis une noire dans U2 (événement N1), alors U2 contient 2 noires et 3 blanches → $P(N2 \mid \mathrm{N1})$ = 2/5 = 0,4

Arbre pondéré complété :



2. Probabilité de N1 ∩ N2 = P(N1) × P(N2 | N1) $= 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$

3. On utilise la loi des probabilités totales :

$$P(N2) = P(N1) \cdot P(N2 \mid N1) + P(\overline{N1}) \cdot P(N2 \mid \overline{N1})$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}16 + 0{,}12 = 0{,}28$$

4. On cherche $P(\overline{N1} \mid N2)$ On utilise la formule de probabilité conditionnelle :

$$P(\overline{N1} \mid N2) = \frac{P(\overline{N1} \cap N2)}{P(N2)} = \frac{0{,}12}{0{,}28} \approx 0{,}43$$

Donc la probabilité d'avoir pioché une blanche dans U1 sachant qu'on a tiré une noire dans U2 est environ 0,43.

Partie B

1. À chaque expérience, la probabilité de succès (tirer une noire dans U2) est constante : 0,28 Les expériences sont indépendantes.

Donc X suit une loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}(n,\ 0{,}28)$$

2. On cherche le plus petit entier n tel que :

$$1 - 0,72^n > 0{,}9 \Rightarrow 0,72^n < 0{,}1$$

On prend le logarithme :

$$n\ln(0{,}72) < \ln(0{,}1) \Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}72)} \approx 7{,}01$$

Donc le plus petit entier cherché est $n = 8$.

3. Cela signifie que si on répète l'expérience 8 fois, alors la probabilité de tirer au moins une fois une boule noire dans U2 est supérieure à 90%.

Partie C

1. Nombre de tirages possibles de 2 boules dans U1 parmi 10 :

$$\binom{10}{2} = 45$$

2. Nombre de tirages avec 1 blanche et 1 noire : On choisit 1 blanche parmi 6 et 1 noire parmi 4 :

$$\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1} = 6 \cdot 4 = 24$$

3. On étudie les 3 cas possibles :

- 2 noires tirées, probabilité : $\binom{4}{2} = 6.$

  → U2 contient 3 noires, 3 blanches → P(N2) = 3/6 = 0,5

- 1 noire + 1 blanche, déjà calculé : 24 cas.

  → U2 : 2 noires, 4 blanches → P(N2) = 2/6 = 1/3

- 2 blanches, probabilité : $\binom{6}{2} = 15$

  → U2 : 1 noire, 5 blanches → P(N2) = 1/6

On calcule la probabilité totale pondérée :

$$P(N2) = \frac{6}{45} \cdot \frac{3}{6} + \frac{24}{45} \cdot \frac{1}{3} + \frac{15}{45} \cdot \frac{1}{6} = \frac{13{,}5}{45} = 0{,}3$$

Conclusion : Dans cette nouvelle expérience, la probabilité de tirer une boule noire dans U2 est 0,30, ce qui est supérieur à 0,28 (valeur de la partie A).

EXERCICE 3 (4 points)

1. On distingue deux cas :

- si n est pair : $u_n = \frac{26}{n}$
- si n est impair : $u_n = \frac{24}{n}$

Donc la suite oscille entre deux suites qui tendent toutes deux vers 0 quand $n \to +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Donc la suite admet une limite finie : elle est convergente.

Affirmation 1 : FAUSSE

2. On considère la suite $t_n = \frac{k}{w_n}$, avec $k > 0$

On calcule le terme suivant :

$$t_{n+1} = \frac{k}{w_{n+1}} = \frac{k}{\frac{w_n}{1 + w_n}} = k \cdot \frac{1 + w_n}{w_n} = k \left(1 + \frac{1}{w_n}\right)$$

Donc :

$$t_{n+1} = k + \frac{k}{w_n} = k + t_n$$

$$\Rightarrow t_{n+1} - t_n = k > 0$$

Donc la suite t_n est arithmétique de raison $k > 0$, donc strictement croissante.

Affirmation 2 : VRAIE

3. La suite v_n est définie par :

$$v_0 = 1, \quad v_{n+1} = \ln(1 + v_n)$$

On étudie le sens de variation. On commence par un calcul numérique :

- $v_0 = 1$
- $v_1 = \ln(1 + 1) = \ln(2) \approx 0{,}693$
- $v_2 = \ln(1 + 0{,}693) = \ln(1{,}693) \approx 0{,}528$
- $v_3 = \ln(1 + 0{,}528) \approx \ln(1{,}528) \approx 0{,}424$

On observe que la suite diminue.

Plus rigoureusement, la fonction $f(x) = \ln(1 + x)$ est croissante mais toujours inférieure à x pour $x > 0$ (car la droite $y = x$ est au-dessus de la courbe de $\ln(1 + x)$).

Donc :

$$v_{n+1} = \ln(1 + v_n) < v_n$$

La suite est strictement décroissante.

Affirmation 3 : VRAIE

4. On utilise une intégration par parties. On pose :

- $u(x) = [\ln(x)]^{n+1}$, donc $u'(x) = \frac{n+1}{x}[\ln(x)]^n$
- $v'(x) = 1$, donc $v(x) = x$

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

On applique cette formule à :

$$I_{n+1} = \int_1^e [\ln(x)]^{n+1}\,dx$$

Cela donne :

$$I_{n+1} = x[\ln(x)]^{n+1}|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{n+1}{x}[\ln(x)]^n\,dx$$

On simplifie :

$$I_{n+1} = e \cdot 1^{n+1} - 1 \cdot 0^{n+1} - (n+1)\int_1^e [\ln(x)]^n\,dx$$

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

L'égalité proposée est donc correcte.

Affirmation 4 : VRAIE

EXERCICE 4 (5 points)

1. Le point A a pour coordonnées $A(1; 2; -1)$ et un vecteur directeur de (d_1) est :

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de (d_1) est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

2. On veut démontrer que les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires. Pour cela, on montre qu'elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Un vecteur directeur de (d_1) est : $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de (d_2) est : $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On observe que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc, les droites ne sont pas parallèles.

On suppose qu'un point de (d_1) a les mêmes coordonnées qu'un point de (d_2), et on cherche s'il existe un couple de réels (t, s) qui vérifie ce système :

$$\begin{cases} x_{(d_1)} = x_{(d_2)} \Rightarrow 1 + t = 0 \\ y_{(d_1)} = y_{(d_2)} \Rightarrow 2 + 2t = 1 + s \\ z_{(d_1)} = z_{(d_2)} \Rightarrow -1 = 2 + s \end{cases}$$

On résout :

- $1 + t = 0 \Rightarrow t = -1$
- $-1 = 2 + s \Rightarrow s = -3$
- On vérifie avec ces valeurs si la deuxième égalité est satisfaite :

$$2 + 2(-1) = 1 + (-3) \Rightarrow 0 = -2$$

Cette égalité est fausse, donc les droites n'ont aucun point commun : elles ne se coupent pas.

Conclusion : Les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

3. Le plan P passe par le point $A(1; 2; -1)$ et est dirigé par les vecteurs :

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On commence par calculer un vecteur normal au plan P en faisant le produit vectoriel :

$$\vec{n} = \overrightarrow{u_1} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) \\ (0 \cdot 2 - 1 \cdot 1) \\ (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Une équation cartésienne du plan est donc de la forme :

$$2(x - 1) - 1(y - 2) - 5(z + 1) = 0$$

On développe :

$$2x - 2 - y + 2 - 5z - 5 = 0 \Rightarrow 2x - y - 5z - 5 = 0$$

Donc une équation cartésienne du plan est :

$$2x - y - 5z - 5 = 0 \quad \text{ou bien encore} \quad -2x + y + 5z + 5 = 0$$

(les deux équations sont équivalentes : on peut multiplier une équation de plan par -1)

4.a On sait que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires et que la droite (d_1) appartient au plan P. Ainsi, la droite (d_2) n'est pas parallèle au plan P. Par conséquent la droite (d_2) et le plan P sont sécants.

4.b On vérifie que le point $F\left(0; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ est bien l'intersection.

Il doit appartenir à (d_2) : on vérifie si on peut écrire ses coordonnées sous la forme :

$$x = 0, \quad y = 1 + s, \quad z = 2 + s$$

On résout :

$$1 + s = -\frac{5}{3} \Rightarrow s = -\frac{8}{3}$$

$$2 + s = -\frac{2}{3} \Rightarrow s = -\frac{8}{3}$$

C'est bien le même s dans les deux cas. Donc F appartient à (d_2)

5.a Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires (d_1) et (d_2) est la longueur du segment $[EF]$ lorsque :

- $E \in (d_1)$, $F \in (d_2)$
- la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et (d_2)

Ce segment EF réalise bien cette situation car (EF) est sur la droite (δ), qui est orthogonale aux deux droites.

Donc la distance entre les droites (d_1) et (d_2) est égale à la longueur EF

5.b On calcule la distance EF entre :

- $E\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -1\right)$
- $F\left(0; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} + \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On normalise :

$$\| \overrightarrow{EF} \| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$