Corrigé du bac général 2024
Spécialité Mathématiques – Polynésie–
Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un enseignant en mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (4 points)

Données :

- $A(2,1,-1)$, $B(-1,2,1)$, $C(5,0,-3)$
- Plan $\mathcal{P}: x + 5y - 2z + 3 = 0$
- Droite $\mathcal{D}: \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = t + 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$

<u>Affirmation 1</u> : Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est-il normal au plan (OAC) ?

On calcule deux vecteurs du plan (OAC) :

- $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

On vérifie maintenant si ces deux vecteurs sont orthogonaux à $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ en calculant les produits scalaires :

- $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{n} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 = 2 + 0 - 2 = 0$
- $\overrightarrow{OC} \cdot \vec{n} = 5 \times 1 + 0 \times 0 + (-3) \times 2 = 5 + 0 - 6 = -1$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OA}$, mais pas à $\overrightarrow{OC}$. Donc, il n'est pas orthogonal à tous les vecteurs du plan, et n'est donc pas normal au plan (OAC).

L'affirmation 1 est fausse.

<u>Affirmation 2</u> : Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont-elles sécantes au point C ?

On calcule le vecteur $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ce sera le vecteur directeur de la droite (AB).

Vérifions si le point $C(5,0,-3)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$. On cherche un réel t tel que :

$$\begin{cases} -t + 3 = 5 \Rightarrow t = -2 \\ t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2 \\ 2t + 1 = -3 \Rightarrow t = -2 \end{cases}$$

Les trois équations donnent le même $t = -2$, donc le point C appartient à la droite $\mathcal{D}$.

Voyons maintenant si C appartient à la droite (AB). On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alors, on devrait avoir :

$$3 = -3\lambda \Rightarrow \lambda = -1 - 1 = \lambda \cdot 1 = -1 - 2 = \lambda \cdot 2 = -2$$

Tout est cohérent, donc C appartient à la droite (AB) aussi.

L'affirmation 2 est vraie.

<u>Affirmation 3</u> : La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan $\mathcal{P}$?

Vecteur directeur de $\mathcal{D}$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vecteur normal du plan $\mathcal{P}$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Calcul du produit scalaire :

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) = -1 + 5 - 4 = 0$$

Donc, le vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est orthogonal au vecteur normal de $\mathcal{P}$. Cela signifie que la droite est parallèle au plan.

L'affirmation 3 est vraie.

<u>Affirmation 4</u> : Le plan médiateur du segment [BC] a-t-il pour équation $3x - y - 2z - 7 = 0$?

Calcul du milieu M de [BC] :

$$M = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{1+(-3)}{2} \right) = (2,1,-1)$$

Vecteur $\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Ce vecteur est normal au plan médiateur. On cherche donc un plan de vecteur normal $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ passant par $(2,1,-1)$.

Équation du plan médiateur :

$$6(x-2) - 2(y-1) - 4(z+1) = 06x - 12 - 2y + 2 - 4z - 4 = 06x - 2y - 4z - 14 = 0$$

Comparons avec l'équation donnée : $3x - y - 2z - 7 = 0$. Il s'agit exactement du même plan, divisé par 2.

L'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

1. On a l'équation différentielle suivante :

$$(E): y' + 0{,}02y = m$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. La méthode classique consiste à :

- Etape 1, résoudre l'équation homogène associée :

$$y' + 0{,}02y = 0$$

qui admet pour solution générale :

$$y_h(t) = k \cdot e^{-0{,}02t}$$

- Etape 2, chercher une solution particulière de l'équation complète $y' + 0{,}02y = m$. Comme le second membre est constant, une solution particulière est une constante $y_p = c$

Alors :

$$y_p' + 0{,}02y_p = 0 + 0{,}02c = m \Rightarrow c = \frac{m}{0{,}02} = 50m$$

Donc, la solution générale est :

$$y(t) = k \cdot e^{-0{,}02t} + 50m$$

Ce qui correspond bien à l'affichage du logiciel :

$$y = k \cdot \exp(-0{,}02t) + 50m$$

2. On a :

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 30$$

Or :

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} (k \cdot e^{-0{,}02t} + 50m) = 0 + 50m = 50m$$

Donc :

$$50m = 30 \Rightarrow m = \frac{30}{50} = 0{,}6$$

3. On connaît maintenant la valeur de $m = 0{,}6$, donc la solution est :

$$y(t) = k \cdot e^{-0{,}02t} + 50 \cdot 0{,}6 = k \cdot e^{-0{,}02t} + 30$$

On utilise la condition initiale $y(0) = 210$:

$$210 = k \cdot e^{0} + 30 = k + 30 \Rightarrow k = 180$$

Donc :

$$f(t) = 180 \cdot e^{-0{,}02t} + 30$$

Partie B

On reprend : $f(t) = 180 \cdot e^{-0{,}02t} + 30$

1. a. Le graphique montre une intersection vers $T \approx 110$ secondes.

b. On résout $f(T) = 50$:

$$180 \cdot e^{-0{,}02T} + 30 = 50$$

$$\Leftrightarrow 180 \cdot e^{-0{,}02T} = 20$$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}02T} = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow -0{,}02T = \ln\left(\frac{1}{9}\right) = -\ln(9)$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\ln(9)}{0{,}02}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2\ln(3)}{0{,}02} = 100 \cdot \ln(3) \approx 109{,}86$$

2. Valeur moyenne de la température sur l'intervalle $[0; 100]$:

$$\text{Valeur moyenne} = \frac{1}{100}\int_0^{100} f(t)\,dt = \frac{1}{100}\int_0^{100} (180 \cdot e^{-0{,}02t} + 30)\,dt$$

On intègre terme à terme :

- $\int_0^{100} 180 \cdot e^{-0{,}02t}\,dt = 180 \cdot \left[\frac{e^{-0{,}02t}}{-0{,}02}\right]_0^{100} = -9000 \cdot (e^{-2} - 1)$
- $\int_0^{100} 30\,dt = 30 \cdot 100 = 3000$

Donc :

$$\int_0^{100} f(t)\,dt = -9000(e^{-2}-1)+3000 = 9000(1-e^{-2})+3000$$

Valeur moyenne :

$$\frac{1}{100}(9000(1-e^{-2})+3000) = 90(1-e^{-2})+30 \approx 107{,}82$$

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}\left(n=3, p=\frac{1}{2}\right)$$

car :

- il y a 3 épreuves indépendantes,
- chaque lancer a 2 issues possibles,
- la probabilité d'obtenir Face à chaque lancer est $\frac{1}{2}$.

2. On complète le tableau de la loi de probabilité de X :

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{3}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \binom{3}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \binom{3}{k}\cdot\frac{1}{8}$$

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Partie B

1. Si une seule pièce tombe sur Face au premier lancer (événement A_1), alors deux pièces sont relancées. Pour gagner, il faut que les deux pièces relancées fassent Face.

La probabilité d'obtenir deux Faces avec deux pièces équilibrées est :

$$\mathbb{P}(G \mid A_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

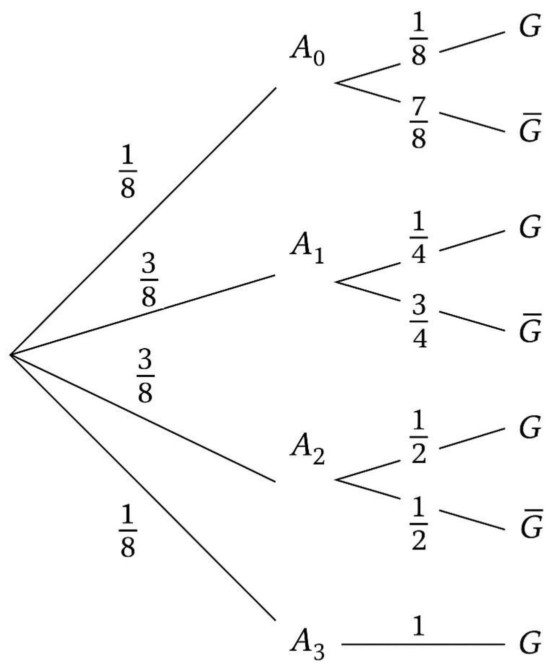
2. On utilise la loi binomiale de la partie A pour les probabilités de A_k :

- $\mathbb{P}(A_0) = \frac{1}{8}$
- $\mathbb{P}(A_1) = \frac{3}{8}$
- $\mathbb{P}(A_2) = \frac{3}{8}$
- $\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{8}$

Probabilités conditionnelles :

- Si A_0 : 3 pièces à relancer → pour gagner : $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
- Si A_1 : 2 pièces à relancer → pour gagner : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
- Si A_2 : 1 pièce à relancer → pour gagner : $\frac{1}{2}$
- Si A_3 : partie gagnée directement

Ce qui donne l'arbre suivant :



3. Probabilité totale de gagner :

$$p = \mathbb{P}(G) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}\left(A_k \cap G\right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{64} + \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{12}{64} + \frac{8}{64} = \frac{27}{64}$$

4. La partie est gagnée. On veut connaître la probabilité que exactement une pièce soit tombée sur Face au premier lancer, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(A_1 \mid G) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{27}{64}} = \frac{3}{32} \cdot \frac{64}{27} = \frac{192}{864} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

5. On joue plusieurs parties indépendantes. On veut que la probabilité de gagner au moins une fois dépasse 0,95.

Soit n le nombre de parties jouées.

Alors :

$$\mathbb{P}(\text{au moins un gain}) = 1 - (1-p)^n > 0{,}95 \Rightarrow (1-p)^n < 0{,}05$$

On a $p = \frac{27}{64}$, donc $1 - p = \frac{37}{64}$

On cherche le plus petit entier n tel que :

$$\left(\frac{37}{64}\right)^n < 0{,}05$$

On utilise le logarithme :

$$n \cdot \ln\left(\frac{37}{64}\right) < \ln(0{,}05) \Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(37/64)} \approx \frac{-2{,}9957}{-0{,}5482} \approx 5{,}47$$

Donc il faut jouer au moins 6 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois dépasse 0,95.

EXERCICE 4 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}$$

Partie A

1. On complète la fonction Python :

```
def suite(n):
    u = 3
    for i in range(n):
        u = 4 / (5 - u)
    return u
```

2. Vérification de l'affichage de suite(2) :

On calcule :

- $u_0 = 3$
- $u_1 = \frac{4}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$
- $u_2 = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} \approx 1{,}3333$

Cela correspond bien à l'affichage de suite(2).

3. En analysant les affichages, la suite semble décroissante et converge vers 1.

Partie B

On pose la fonction $f(x) = \frac{4}{5-x}$ définie sur $]-\infty; 5[$. La suite est définie par :

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. On calcule la dérivée :

$$f(x) = \frac{4}{5-x} = \frac{0 - 4 \times (-1)}{(5-x)^2} = \frac{4}{(5-x)^2}$$

La dérivée est strictement positive sur l'intervalle considéré.

Donc, f est strictement croissante sur $]-\infty; 5[$.

2. Montrons par récurrence que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : $u_0 = 3$, donc $1 \leq u_1 = \frac{4}{5-3} = 2 \leq 3 = u_0 \leq 4$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.

On applique la fonction f qui conserve l'ordre car elle est croissante sur $]-\infty; 5[$.

Ainsi :

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(4)$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout n, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

3. a. Montrons que $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{4}{5 - x} = x \Rightarrow 4 = x(5 - x) \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Donc l'équivalence est démontrée.

b. Résolvons $f(x) = x$ dans $]-\infty; 5[$.

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 3}{2} = 1 \text{ ou } 4$$

Les deux solutions sont dans l'intervalle $]-\infty; 5[$.

4. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 1, donc convergente par le théorème de convergence monotone.

Sa limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$

Donc ℓ est solution de $x = \frac{4}{5-x} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 4$

Mais comme (u_n) est décroissante et $u_0 = 3$, la limite est nécessairement $\ell = 1$

5. Et si on change u_0 pour 4 au lieu de 3 ?

On obtient une suite constante, car :

$$u_1 = \frac{4}{5 - 4} = 4$$

$$u_2 = \frac{4}{5 - 4} = 4$$

$$u_3 = etc.$$

Dans ce cas, on a $u_n = 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.