Corrigé du bac général 2024
Spécialité Mathématiques – Polynésie–
Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un enseignant en mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (4 points)

On nous donne :

- $P(J) = 0{,}6 = \frac{3}{5}$
- $P_J(S) = \frac{8}{9}$

1. On veut déterminer $P(J \cap S)$.

Par la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(J \cap S) = P(J) \times P_J(S) = \frac{3}{5} \times \frac{8}{9} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

2. a. On sait que :

$$P(S) = \frac{2}{3}$$

On utilise l'identité :

$$P(S) = P(J \cap S) + P(\bar{J} \cap S)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{8}{15} + P(\bar{J} \cap S)$$

$$\Rightarrow P(\bar{J} \cap S) = \frac{2}{3} - \frac{8}{15} = \frac{2}{15}$$

2. b. On veut :

$$P_{\bar{J}}(S) = \frac{P(\bar{J} \cap S)}{P(\bar{J})}$$

Or :

$$P(\bar{J}) = 1 - P(J) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Donc :

$$P_{\bar{J}}(S) = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{15} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

3. a. On effectue un tirage avec remise de 30 personnes indépendantes.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes qui pratiquent une activité sportive régulière suit une loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}\left(n = 30, p = \frac{2}{3}\right)$$

3. b. On veut $P(X = 16)$, donc on utilise la formule de la loi binomiale :

$$P(X = 16) = \binom{30}{16}\left(\frac{2}{3}\right)^{16}\left(\frac{1}{3}\right)^{14}$$

Ce calcul est à effectuer à la calculatrice, avec mode examen actif :

$$P(X = 16) \approx 0{,}046$$

3. c. Soit X le nombre de personnes sportives parmi les 30 : le coût total est $380 \times X$

Le budget est de 10 000 €. On cherche la probabilité que ce soit insuffisant, donc que :

$$380 \times X > 10\,000 \Rightarrow X > \frac{10\,000}{380} \approx 26{,}316$$

Donc on cherche :

$$P(X \geq 27)$$

Avec la calculatrice en mode examen :

$$P(X \geq 27) = 1 - P(X \leq 26) \approx 1 - 0{,}997 = 0{,}003$$

La probabilité que ce budget soit insuffisant est donc de 0,3%.

EXERCICE 2 (5 points)

1. Cette équation est linéaire du type $y' + 3y = 7$. On utilise la méthode classique :

On cherche une solution particulière : une constante $y_p = \frac{7}{3}$, car sa dérivée est nulle et elle satisfait l'équation.

On résout ensuite l'équation homogène $y' = -3y$, qui admet pour solution générale $y_h(x) = Ae^{-3x}$

Donc la solution générale est :

$$y(x) = Ae^{-3x} + \frac{7}{3}$$

Avec $y(0) = 1$, on a :

$$1 = A + \frac{7}{3} \Rightarrow A = 1 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3}$$

Donc :

$$f(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x} + \frac{7}{3}$$

Réponse de la question 1 : B

2. Visuellement, la courbe est au-dessus de l'axe x entre $x = 1$ et $x = 5$, et semble comprise entre $y = 0{,}5$ et $y = 3{,}5$ environ.

L'aire est donc encadrée entre :

$$(5-1) \times 0{,}5 = 2 \quad \text{et} \quad (5-1) \times 3{,}5 = 14$$

En valeur moyenne, cela fait ~ 8.

La seule réponse qui convient est C : $5 \leq I \leq 10$

Une autre solution aurait été de compter les « carrés » sous la courbe entre $x = 1$ et $x = 5$. On peut compter 5 carrés pleins et 1 ou 2 carrés complémentaires, donc environ 7 au total.

Réponse de la question 2 : C

3. On veut approximer $\int_0^2 g'(x)\,dx$, ce qui est simplement $g(2) - g(0)$.

Calcul rapide :

- $g(0) = 0^2 \ln(0^2 + 4) = 0$
- $g(2) = 4\ln(4 + 4) = 4\ln(8) \approx 8{,}316$

Arrondi à 0,1 près : 8,3

Réponse de la question 3 : B

4. On veut le nombre de groupes de 5 élèves choisis parmi 31, sans ordre : c'est une combinaison.

Formule : $\binom{31}{5}$

Réponse à la question 4 : D

5. On veut former un groupe de 5 élèves avec exactement 3 élèves ayant choisi SES (il y en a 20), et 2 élèves parmi les 11 restants (10 en physique-chimie et 1 en LLCE espagnol).

Nombre de façons : $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$

Réponse à la question 5 : A

EXERCICE 3 (6 points)

1. a. On calcule les deux premiers termes.

- $u_1 = 8 - \ln\left(\frac{8}{4}\right) = 8 - \ln(2) \approx 7{,}31$
- $u_2 = u_1 - \ln\left(\frac{u_1}{4}\right) = 8 - \ln(2) - \ln\left(\frac{8-\ln(2)}{4}\right) \approx 6{,}70$

1. b. Cette fonction calcule la somme des k premiers termes de la suite (u_n), c'est-à-dire :

$$S_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{k-1}$$

Donc le résultat de mystere(10) correspond à :

$$S_{10} = \sum_{n=0}^{9} u_n$$

1. c. Pour renvoyer la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n), il suffit de diviser la somme par k sur la dernière ligne. Voici la fonction modifiée :

```
def moyenne(k):
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k):
        S = S + u
        u = u - log(u / 4)
    return S / k
```

2. On simplifie l'écriture :

$$f(x) = x - \ln(x) + \ln(4)$$

Puis on dérive :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

- $f'(x) > 0$ si $x > 1$
- $f'(x) = 0$ si $x = 1$
- $f'(x) < 0$ si $x < 1$

Donc le tableau de variation est :

x	0^+	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1 + ln(4)	↗

On calcule le minimum :

$$f(1) = 1 - \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \ln(4)$$

3. a. On veut montrer par récurrence que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : $u_0 = 8$, et on a vu plus haut que $u_1 \approx 7{,}31$, donc :

$$1 \leq u_1 \leq u_0$$

Hérédité : supposons $1 \leq u_n \leq u_{n-1}$. Alors $u_n > 0$, donc $f(u_n)$ est défini et :

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right) = u_n + \ln\left(\frac{4}{u_n}\right)$$

Si $u_n \geq 4$, alors $\frac{4}{u_n} \leq 1$, donc $\ln\left(\frac{4}{u_n}\right) \leq 0$, donc :

$$u_{n+1} \leq u_n$$

Et puisque f atteint son minimum en $x = 1$ avec $f(1) = 1 + \ln(4) > 1$, on en déduit que $f(x) \geq 1$ sur $]0; +\infty[$, donc :

$$u_{n+1} \geq 1$$

Conclusion : La propriété est vraie au rang $n + 1$, donc la récurrence est validée.

3. b. On a montré que (u_n) est décroissante et minorée (par 1), donc elle converge.

3. c. On a :

$$x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x \Rightarrow -\ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{4} = 1 \Rightarrow x = 4$$

3. d. Puisque $\lim u_n = \ell$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$, on a :

$$\ell = f(\ell) \Rightarrow \ell = 4$$

Donc la suite (u_n) converge vers 4.

EXERCICE 4 (5 points)

1. On cherche à vérifier si les points $A(-1; -1; 17)$, $B(4; -2; 4)$ et $C(1; -3; 7)$ sont alignés.

On calcule les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5; -1; -13), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (2; -2; -10)$$

On regarde s'ils sont colinéaires. On cherche s'il existe un réel λ tel que :

$$(2; -2; -10) = \lambda(5; -1; -13)$$

On cherche λ coordonnée par coordonnée :

- $2 = 5\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}$
- $-2 = -1 \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = 2$
- $-10 = -13 \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{10}{13}$

Les trois valeurs de λ ne sont pas égales, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Conclusion : les points A, B, C ne sont pas alignés.

2. a. On doit montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Produit scalaire :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot (-13) = 10 + 3 - 13 = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot (-10) = 4 + 6 - 10 = 0$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs du plan, donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2. b. Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est de la forme :

$$2x - 3y + z + d = 0$$

On utilise un point du plan, par exemple $A(-1; -1; 17)$ pour déterminer d :

$$2(-1) - 3(-1) + 17 + d = 0 \Rightarrow -2 + 3 + 17 + d = 0 \Rightarrow d = -18$$

Donc une équation du plan est :

$$2x - 3y + z - 18 = 0$$

3. a. La droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t + 5 \\ z = 4t + 1 \end{cases}$$

Un vecteur directeur est donné par les coefficients de t :

$$\vec{u} = (3; 1; 4)$$

3. b. On cherche l'intersection entre la droite d et le plan $\mathcal{P}$. On injecte l'expression de x, y, z dans l'équation du plan :

$$2x - 3y + z - 18 = 0 \Rightarrow 2(3t + 2) - 3(t + 5) + (4t + 1) - 18 = 0$$

$$\Rightarrow 6t + 4 - 3t - 15 + 4t + 1 - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (6t - 3t + 4t) + (4 - 15 + 1 - 18) = 0$$

$$\Rightarrow 7t - 28 = 0 \Rightarrow t = 4$$

On remplace dans les équations paramétriques :

$$x = 3 \cdot 4 + 2 = 14, \quad y = 4 + 5 = 9, \quad z = 4 \cdot 4 + 1 = 17$$

Donc le point E d'intersection est : $E(14; 9; 17)$

4. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et passant par $D(2; 5; 1)$, de vecteur directeur $\vec{n} = (2; -3; 1)$

La distance d'un point $D(x_0; y_0; z_0)$ à un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$\text{dist}(D, \mathcal{P}) = \frac{|\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d\ |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ici :

- $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$, $d = -18$
- $D(2; 5; 1)$

Calcul :

- Numérateur : $|\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 - 18\ |=|\ 4 - 15 + 1 - 18\ |=|\ -28\ |= 28$
- Dénominateur : $\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$

Donc :

$$\text{Distance} = \frac{28}{\sqrt{14}} = \frac{28\sqrt{14}}{14} = 2\sqrt{14}$$

5. Le drone part du point D et doit rejoindre un point quelconque du plan $\mathcal{P}$, donc au minimum, il doit parcourir la distance entre D et le plan, soit $2\sqrt{14}$ centaines de mètres, c'est-à-dire :

$$2\sqrt{14} \times 100 \approx 2 \cdot 3{,}742 \cdot 100 \approx 748{,}5 \text{ mètres}$$

Le drone vole à 18,6 m/s, donc la durée minimale nécessaire est :

$$\frac{748{,}5}{18{,}6} \approx 40{,}2 \text{ secondes}$$

Il reste 40 secondes, donc le drone ne peut pas arriver à temps.