Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques – Amérique du Nord – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un enseignant en mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

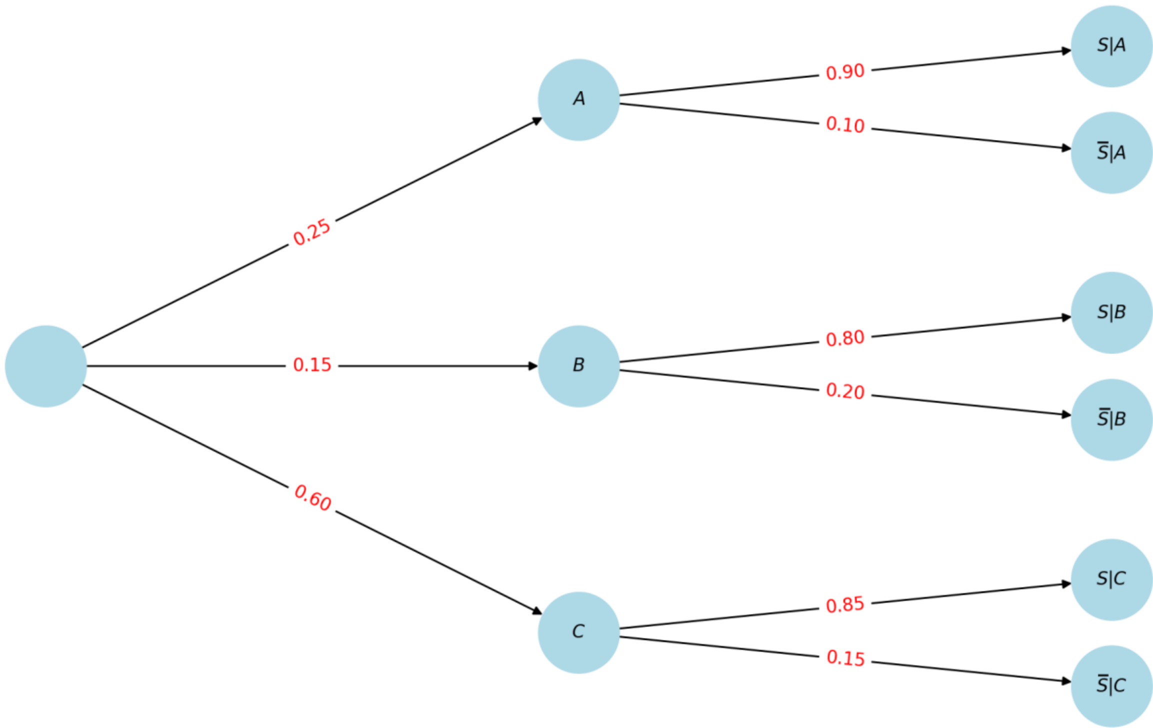
EXERCICE 1 (6 points)

Partie A

1. À partir de l'énoncé :

- $P(A) = 0{,}25$ et $P(S|A) = 0{,}9$ donc $P(\bar{S}|A) = 0{,}1$
- $P(B) = 0{,}15$ et $P(S|B) = 0{,}8$ donc $P(\bar{S}|B) = 0{,}2$
- $P(C) = 1 - 0{,}25 - 0{,}15 = 0{,}6$ et $P(S|C) = 0{,}85$ donc $P(\bar{S}|C) = 0{,}15$

L'arbre pondéré est donc :



2. On cherche $P(B \cap S)$. Par la formule des probabilités composées :

$P(B \cap S) = P(B) \times P(S|B) = 0{,}15 \times 0{,}8 = 0{,}12$

3. Calcul de $P(C \cap \bar{S})$

$P(C \cap \bar{S}) = P(C) \times P(\bar{S}\ C) = 0{,}6 \times 0{,}15 = 0{,}09$

Interprétation : cela signifie que 9 % des connexions sont à la fois stables et passent par le serveur C.

4. On applique la formule des probabilités totales :

$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S)$ $P(S) = 0,25 \times 0,9 + 0,15 \times 0,8 + 0,6 \times 0,85$ $P(S) = 0,225 + 0,12 + 0,51 = 0,855$

5. On cherche la probabilité conditionnelle $P(B|S)$. On utilise la formule de Bayes :

$P(B|S) = P(B \cap S) / P(S) = 0,12 / 0,855 \approx 0,140$

Donc : la probabilité qu'une connexion stable ait eu lieu via le serveur B est d'environ 0,140 soit 14,0 %.

Partie B

1. On considère la variable aléatoire X : nombre de connexions instables parmi 50.

1.a X suit une loi binomiale de paramètres :

- $n = 50$ (taille de l'échantillon)
- $p = 0,145$ (probabilité qu'une connexion soit instable)

Donc : $X \sim B(50\ ;\ 0,145)$

1.b On cherche $P(X \leq 8)$

Ce calcul se fait avec une calculatrice. On utilise une fonction de somme cumulative :

$P(X \leq 8) \approx 0,712$ (valeur arrondie au millième)

2. $X_n \sim B(n\ ;\ 0,145)$

2.a On cherche : $p_n = P(X_n \geq 1)$

On utilise la complémentaire :

$$p_n = 1 - P(X_n = 0) = 1 - (1 - 0{,}145)^n = 1 - 0{,}855^n$$

2.b On résout l'inéquation :

$$1 - 0{,}855^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}855^n \leq 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow n.\ln(0{,}855) \leq \ln(0{,}01)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}855)} \approx \frac{-4{,}6051}{-0{,}1566} \approx 29{,}40$$

Donc la plus petite valeur entière est n = 30.

3.a Calcul de l'espérance $E(F_n)$

$$E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{E(X_n)}{n} = \frac{n \times p}{n} = p = 0{,}145$$

3.b On veut vérifier :

$$P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{12{,}5}{n}$$

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(F_n)}{\varepsilon^2}$$

D'après l'énoncé : $V(F_n) = \frac{0{,}123975}{n}$

Donc pour ε = 0,1 :

$$P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{\frac{0{,}123975}{n}}{0{,}01} = \frac{12{,}3975}{n}$$

Ce résultat est bien inférieur ou égal à $\frac{12{,}5}{n}$, donc l'inégalité est vérifiée.

3.c On constate que |0,3 − 0,145| = 0,155 > 0,1

On a vu que la probabilité d'un tel écart est très faible (≤ 12,5 / 1000 = 0,0125), donc environ 1,25 %.

Cela signifie qu'il est très peu probable d'observer une fréquence de 0,3 si les serveurs fonctionnent normalement.

Conclusion : Le responsable a raison de soupçonner un dysfonctionnement des serveurs.

EXERCICE 2 (5 points)

1.

$$u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}$$

2.a

$$a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$a_1 = \frac{u_1}{u_1 - 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{5/4}{1/4} = 5$$

2.b On commence par exprimer séparément a_{n+1} et $3a_n - 1$ à l'aide de u_n.

$$3a_n - 1 = 3\frac{u_n}{u_n - 1} - 1 = 3\frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$$

Calculons maintenant a_{n+1}. On a :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n + 1 - (u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

Donc :

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{u_n - 1}{u_n + 2}} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$$

D'où :

$$a_{n+1} = 3a_n - 1$$

La relation est démontrée.

2.c On montre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$a_n \geq 3n - 1$$

Initialisation : Pour $n = 1$, $a_1 = 5$ et $3 \times 1 - 1 = 2$, donc $a_1 \geq 2$: l'inégalité est vraie.

Hérédité : On suppose que pour un certain entier $n \geq 1$, $a_n \geq 3n - 1$. Alors :

$$a_{n+1} = 3a_n - 1 \geq 3(3n - 1) - 1 = 9n - 3 - 1 = 9n - 4$$

Or :

$$9n - 4 \geq 3(n + 1) - 1 = 3n + 2 \Leftrightarrow 6n - 6 \geq 0$$

Ce qui est vrai pour tout $n \geq 1$. L'hérédité est donc établie.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$a_n \geq 3n - 1$$

2.d On sait que pour tout entier $n \geq 1$: $a_n \geq 3n - 1$

Par ailleurs, on a : $\lim_{n\to+\infty} 3n - 1 = \lim_{n\to+\infty} 3n = +\infty$

D'après le théorème de comparaison, on a ainsi : $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

3.a On a, par définition de a_n :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1} \Rightarrow a_n(u_n - 1) = u_n \Rightarrow a_n u_n - a_n = u_n$$

$$\Rightarrow a_n u_n - u_n = a_n \Rightarrow u_n(a_n - 1) = a_n \Rightarrow u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$$

3.b On sait que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_n - 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_n(1 - \frac{1}{a_n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}} = 1$$

La suite (u_n) converge donc vers 1.

4.a Ce programme modélise la suite (u_n). La variable u représente le terme u_n, et n représente le rang courant. La condition u - 1 > p signifie que l'on poursuit tant que le terme est à plus de p au-dessus de la limite 1. Ainsi, la fonction algo(p) renvoie :

- le plus petit entier n tel que $u_n - 1 \leq p$,
- le terme u_n correspondant.

Autrement dit, n est le rang à partir duquel la suite est suffisamment proche de sa limite 1, avec une précision p, et u est cette approximation de la limite.

4.b On cherche le plus petit entier n tel que $u_n - 1 \leq 0{,}001$.

Avec l'aide de la calculatrice, on trouve :

- $u_7 \approx 1{,}00304$
- $u_8 \approx 1{,}00101$
- $u_9 \approx 1{,}00033$

Donc la condition est satisfaite pour la première fois au rang $n = 9$.

Réponse : $n = 9$.

EXERCICE 3 (4 points)

Affirmation 1

Vérifions si elles sont parallèles :

- Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}_d = (-2,\ 0,\ -6)$
- Un vecteur directeur de Oy est $\vec{v} = (0,\ 1,\ 0)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

Vérifions si elles sont sécantes :

On cherche à savoir s'il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} 3 - 2t = 0 \\ -1 = y \\ 2 - 6t = 0 \end{cases}$$

De la première équation : $t = \frac{3}{2}$

De la troisième : $t = \frac{1}{3}$

Les deux valeurs de t sont différentes ⇒ incohérence ⇒ pas de point commun.

Donc les deux droites ne sont pas sécantes.

Conclusion : Les droites ne sont ni parallèles, ni sécantes, donc elles sont non coplanaires.

<u>Affirmation 1 : Vraie</u>

Affirmation 2

Le vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}_d = (-2,\ 0,\ -6)$

On cherche l'équation du plan P passant par le point $A(3,\ -3,\ -2)$ et orthogonal à la droite (d), donc de vecteur normal $\vec{n} = (-2,\ 0,\ -6)$

L'équation du plan est donc :

$$-2(x-3) + 0(y+3) - 6(z+2) = 0 \Rightarrow -2(x-3) - 6(z+2) = 0$$

Développons :

$$-2x + 6 - 6z - 12 = 0 \Rightarrow -2x - 6z - 6 = 0 \Rightarrow 2x + 6z + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x + 3z + 3 = 0$$

<u>Affirmation 2 : Vraie</u>

Affirmation 3

On cherche t tel que $x = 2$, donc :

$$3 - 2t = 2 \Rightarrow t = 0.5$$

On en déduit que $C = (2,\ -1,\ -1)$

Calculons les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5 - 3,\ -4 - (-3),\ -1 - (-2)) = (2,\ -1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2 - 3,\ -1 - (-3),\ -1 - (-2)) = (-1,\ 2,\ 1)$$

On utilise la formule du produit scalaire pour calculer le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -2 - 2 + 1 = -3$$

Normes des vecteurs :

$$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\| \overrightarrow{AC} \| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

Donc :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\| \overrightarrow{AB} \| \cdot \| \overrightarrow{AC} \|} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\widehat{BAC} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

<u>Affirmation 3 : Fausse</u>

Affirmation 4

La distance d'un point $B(x_0,\ y_0,\ z_0)$ au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ici :

- $a = 1$, $b = 0$, $c = 3$, $d = -7$ car le plan a pour équation $x + 3z - 7 = 0$
- $B = (5,\ -4,\ -1)$

$$BH = \frac{|1 \cdot 5 + 0 \cdot (-4) + 3 \cdot (-1) - 7|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{|5 - 3 - 7|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

<u>Affirmation 4 : Vraie</u>

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A

1. La fonction associée à $\mathcal{C}_2$ s'annule pour $x = -2$ et $x = 1$. Ce sont donc des racines. La dérivée d'une fonction s'annule aux extremums locaux. Or, sur le graphique, la courbe $\mathcal{C}_1$ présente des points d'inflexion ou d'extremums proches de ces abscisses. De plus, le fait que $\mathcal{C}_2$ ait une allure « polynomiale » et s'annule en plusieurs points correspond bien à une fonction dérivée.

Donc :

- $\mathcal{C}_1$ est la représentation graphique de la fonction g
- $\mathcal{C}_2$ est la représentation graphique de la fonction g'

2. La tangente à une courbe au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = g'(0) \cdot x + g(0)$$

Or, d'après les graphiques :

- $g'(0) = 2$ (valeur de la fonction dérivée au point 0)
- $g(0) = 1$

Donc l'équation de la tangente est :

$$y = 2x + 1$$

Partie B

1. On vérifie que la fonction $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est solution.

Calcul de $f'_0(x)$:

$$\begin{aligned} f'_0(x) &= [(x^2 + 3x) \cdot e^{-x}]' = (x^2 + 3x)' \cdot e^{-x} + (x^2 + 3x) \cdot (e^{-x})' \\ &= (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x)e^{-x} \end{aligned}$$

Donc :

$$f_0(x) + f'_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x} + [(2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x)e^{-x}] = (2x + 3)e^{-x}$$

Donc f_0 est bien solution de (E).

2. Résolvons l'équation homogène associée :

$$(E_0): y + y' = 0 \Rightarrow y' = -y$$

C'est une équation différentielle linéaire classique dont la solution générale est :

$$y(x) = Ce^{-x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

3. La solution générale de (E) est donc :

$$y(x) = f_0(x) + Ce^{-x} = (x^2 + 3x)e^{-x} + Ce^{-x} = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$$

4. On nous dit que la fonction g vue en partie A est une solution de (E), et on sait que $g(0) = 1$. On a :

$$g(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x} \Rightarrow g(0) = (0^2 + 0 + C)e^0 = C \Rightarrow C = 1$$

Donc :

$$g(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$$

5. On cherche les solutions de (E) dont la courbe a exactement deux points d'inflexion.

On part de la solution générale :

$$y(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$$

Notons y'' la dérivée seconde. Un point d'inflexion est un point où $y''(x) = 0$ et où la concavité change.

On commence par calculer :

$$\begin{aligned} y'(x) &= [(x^2 + 3x + C)e^{-x}]' = (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + C)e^{-x} \\ &= (-x^2 - x + 3 - C)e^{-x} \end{aligned}$$

Puis :

$$y''(x) = [(-x^2 - x + 3 - C)e^{-x}]'$$
$$= (-2x - 1)e^{-x} + (x^2 + x - 3 + C)e^{-x} = (x^2 - x - 2 + C)e^{-x}$$

Donc :

$$y''(x) = (x^2 - x - 2 + C)e^{-x}$$

Pour que la courbe admette exactement deux points d'inflexion, il faut que l'équation $y''(x) = 0$ ait exactement deux racines réelles distinctes. Cela revient à résoudre :

$$x^2 - x - 2 + C = 0$$

Le discriminant de ce trinôme est :

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2 + C) = 1 + 8 - 4C = 9 - 4C$$

Pour qu'il y ait deux racines réelles distinctes, il faut $\Delta > 0$, donc :

$$9 - 4C > 0 \Rightarrow C < \frac{9}{4}$$

De plus, pour qu'il y ait exactement deux points d'inflexion, on veut éviter $\Delta = 0$ (ce qui donnerait un seul point d'inflexion).

Donc, la condition est :

$$C < \frac{9}{4}$$

Partie C

1. La fonction $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ est un produit de deux fonctions :

- $x^2 + 3x + 2 \to \infty$ lorsque $x \to +\infty$
- $e^{-x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$

Mais l'exponentielle décroît plus rapidement que le polynôme ne croît, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

2.a Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = [(x^2 + 3x + 2)e^{-x}]' = (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$$

2.b Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-x^2 - x + 1$

On résout :

$$-x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1^2 + 4 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

3. Sur $[0; +\infty[$, on a : $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ et $e^{-x} > 0$.

Donc $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, donc la fonction est positive sur cet intervalle.

4. L'aire $A(\alpha)$ est l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ entre $x = 0$ et $x = \alpha$

On nous donne que $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$ est une primitive de $f(x)$

Alors :

$$A(\alpha) = \int_0^{\alpha} f\,(x)dx = F(\alpha) - F(0)$$

Calcul :

$$F(0) = (-0 - 0 - 7)e^0 = -7$$

$$\Rightarrow A(\alpha) = F(\alpha) + 7 = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} + 7$$