Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques – Amérique du Nord – Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D’ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l’épreuve : 4 heures

L’usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L’usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un enseignant en mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. La variable aléatoire N suit une loi binomiale, car on répète une épreuve de Bernoulli (réussite ou échec d'un lancer) un nombre fixé de fois, avec la même probabilité de succès et indépendance entre les essais. Victor fait 15 lancers et a une probabilité de réussite de 0,32 à chaque lancer.

Donc : $N \sim \mathcal{B}(15; 0{,}32)$

2. Formule de la loi binomiale : $P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Ici, $\binom{15}{4} = 1365$, $p = 0{,}32$, $1 - p = 0{,}68$

Donc : $P(N = 4) = 1365 \times 0,32^4 \times 0,68^{11} \approx 0{,}206$

3. Ce type de probabilité cumulative se lit avec la calculatrice (mode loi binomiale cumulée). On obtient : $P(N \leq 6) \approx 0{,}828$

4. L'espérance d'une variable binomiale est donnée par : $E(N) = n \times p$

Ici : $E(N) = 15 \times 0{,}32 = 4{,}8$

5.a Chaque panier marqué vaut 3 points. Donc : $T = 3N$

5.b L'espérance d'une variable affine est donnée par : $E(T) = E(3N) = 3 \times E(N) = 3 \times 4{,}8 = 14{,}4$

Interprétation : En moyenne, Victor marque 14,4 points au total lors d'une série de 15 lancers à trois points.

5.c On cherche $P(12 \leq T \leq 18)$. Or $T = 3N$, donc l'événement $12 \leq T \leq 18$ équivaut à : $12 \leq 3N \leq 18$, soit $4 \leq N \leq 6$

Donc : $P(4 \leq N \leq 6) = P(N = 4) + P(N = 5) + P(N = 6)$

Ces trois probabilités peuvent être calculées ou lues sur la calculatrice :

- $P(N = 4) \approx 0{,}206$ (déjà calculé)
- $P(N = 5) \approx 0{,}213$

- $P(N = 6) \approx 0{,}167$

Donc : $P(4 \leq N \leq 6) \approx 0{,}206 + 0{,}213 + 0{,}167 = 0{,}586$

Partie B

1.a La variable aléatoire M_{50} représente la moyenne des points marqués par Victor sur 50 matchs. Autrement dit, c'est la moyenne de 50 variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{50}$, toutes identiquement distribuées comme X, et indépendantes.

1.b On utilise ici les propriétés des espérances et variances :

- $E(M_{50}) = E\left(\frac{X_1+\dots+X_{50}}{50}\right) = \frac{1}{50} \times (50 \times E(X)) = E(X) = 22$
- $V(M_{50}) = V\left(\frac{X_1+\dots+X_{50}}{50}\right) = \frac{1}{50^2} \times (50 \times V(X)) = \frac{65}{50} = 1{,}3$

1.c On veut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|M_{50} - E(M_{50})| \geq 3) \leq \frac{V(M_{50})}{3^2}$$

On remplace par les valeurs trouvées :

$$P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{1{,}3}{9} = \frac{13}{90}$$

L'inégalité est démontrée.

1.d On sait que $P(|M_{50} - 22| < 3) = P(19 < M_{50} < 25)$, car cela revient à dire que M_{50} s'écarte de 22 de moins de 3 unités. On utilise le résultat de la question précédente :

$$P(19 < M_{50} < 25) = P(|M_{50} - 22| < 3) = 1 - P(|M_{50} - 22| \geq 3)$$

Or :

$$P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90} \Rightarrow P(19 < M_{50} < 25) \geq 1 - \frac{13}{90} = \frac{77}{90} \approx 0{,}856$$

Donc :

$$P(19 < M_{50} < 25) > 0{,}85$$

2. Plus n augmente, plus la variance de M_n diminue :

$$V(M_n) = \frac{V(X)}{n} = \frac{65}{n}$$

On peut appliquer encore une fois l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|M_n - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{9n}$$

On cherche n tel que :

$$\frac{65}{9n} < 0{,}01 \Rightarrow n > \frac{65}{0{,}09} \approx 722{,}22$$

Donc pour tout entier $n \geq 723$, on a bien $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0{,}01$

L'affirmation est donc fausse, car un tel entier existe bel et bien.

EXERCICE 2 (5 points)

1.a On a $u_0 = 2$

et $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2}\, u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{1/4}$

1.b À l'aide de la calculatrice, on observe que la suite semble décroissante et semble converger vers 1.

2.a On veut montrer par récurrence que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation **:** $u_0 = 2 \geq 1$, donc $u_1 = \sqrt{2} \in [1{,}2] \Rightarrow 1 \leq u_1 \leq u_0$ La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité **:** Supposons que $1 \leq u_n \leq u_{n-1}$ Alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ Comme $u_n \geq 1 \Rightarrow \sqrt{u_n} \leq u_n$, et $u_n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$ Donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

Conclusion **:** la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.b La suite (u_n) est bornée inférieurement par 1 (car tous les termes sont ≥ 1), et décroissante (car $u_{n+1} \leq u_n$) Donc, la suite est convergente.

2.c Élevons au carré : $\sqrt{x} = x \Rightarrow x = x^2 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

Mais $\sqrt{x} = x$ implique $x \geq 0$ et aussi $\sqrt{x} = x \Rightarrow x \geq 0$ On vérifie que $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0} = 0$, mais dans notre cas $u_n \geq 1$, donc seule la solution 1 est à retenir comme limite possible.

2.d D'après 2.b la suite est convergente, et d'après 2.c, si elle admet une limite ℓ, alors $\ell = \sqrt{\ell} \Rightarrow \ell = 1$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$

Partie B

1.a Comme $u_{n+1} = \sqrt{u_n} \Rightarrow \ln(u_{n+1}) = \ln(\sqrt{u_n}) = \frac{1}{2}\ln(u_n)$

Donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, ce qui montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

1.b Puisque v_n est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_0 = \ln(2)$, alors :

$$v_n = \ln(2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

1.c On sait que $v_n = \ln(u_n)$, donc :

$$\ln(u_n) = \ln(2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \ln(2) = 2^n \cdot \ln(u_n)$$

2.a En testant avec la calculatrice :

- $u_6 \approx 1{,}01089$
- $u_7 \approx 1{,}00543$

Donc le plus petit tel que $u_k \in]0{,}99; 1{,}01[$ est $k = 7$

Et :

$$u_7 \approx 1{,}00543 \text{ (à } 10^{-5} \text{ près)}$$

2.b Puisque $u_k \in]0{,}99; 1{,}01[$, on approxime $\ln(u_k) \approx u_k - 1$

Donc :

$$\ln(u_7) \approx 1{,}00543 - 1 = 0{,}00543$$

2.c On a vu que $\ln(2) = 2^7 \cdot \ln(u_7)$ Donc :

$$\ln(2) \approx 128 \cdot (u_7 - 1) \approx 128 \cdot 0{,}00543 \approx 0{,}69504$$

Ce qui est une bonne approximation, puisque $\ln(2) \approx 0{,}69315$

3. On complète l'algorithme :

```
from math import*

def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n + 1
    L = 2**n * (a - 1)
    return L
```

L'instruction finale $L = 2^n \cdot (a - 1)$ donne une approximation de $\ln(a)$, en utilisant la même méthode que pour $\ln(2)$.

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A

Affirmation 1

On construit géométriquement un chemin de J à H. On peut écrire :

$$\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH}$$

- $\overrightarrow{JF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$, car J est le milieu de $[BF]$
- $\overrightarrow{FE}$ est dans la direction de $\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{EH}$ est dans la même direction que $\overrightarrow{BC}$

Donc :

$$\overrightarrow{JH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

Or, dans le cube :

- $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH} = 2\overrightarrow{DM}$
- $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BI}$
- $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$

En remplaçant :

$$\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{DM} + 2\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CB}$$

<u>Affirmation 1 : vraie</u>

Affirmation 2

On suit le chemin :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$$

Mais $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$, donc :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$$

Donc $\overrightarrow{AG}$ s'écrit comme une somme de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$, ce qui signifie qu'ils sont linéairement dépendants.

Ainsi Le triplet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG})$ ne forme pas une base de l'espace**.**

<u>Affirmation 2 : fausse</u>

Affirmation 3

On peut écrire :

$\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DM}$

Donc :

$$\overrightarrow{IB}\,.\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DM}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DM}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}$$

Or, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} = 0$ car les vecteurs sont orthogonaux dans le cube.

Donc :

$$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = -\frac{1}{4}$$

Affirmation 3 : vraie

Partie B

Affirmation 4

Un vecteur normal à P est :

$$\vec{n} = (2, -1, 3)$$

Par ailleurs :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -3, 8)$$

Pour que la droite (AB) soit parallèle au plan P, il faut que son vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ soit orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$ du plan.

On calcule leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 3 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 8 \cdot 3 = 6 + 3 + 24 = 33$$

Le produit scalaire est non nul, donc $\overrightarrow{AB}$ n'est pas orthogonal à $\vec{n}$, ce qui signifie que la droite (AB) n'est pas parallèle au plan P.

Affirmation 4 : fausse

Affirmation 5

Un plan P' parallèle à P a le même vecteur normal, donc la même équation à coefficients $2x - y + 3z + d = 0$, avec un autre terme constant d.

Pour déterminer d, on remplace $x = 5$, $y = -3$, $z = 7$ dans l'équation :

$$2 \cdot 5 - (-3) + 3 \cdot 7 + d = 0 \Rightarrow 10 + 3 + 21 + d = 0 \Rightarrow 34 + d = 0 \Rightarrow d = -34$$

Donc l'équation du plan P' est :

$$2x - y + 3z - 34 = 0$$

Si on multiplie toute l'équation par -1 (ce qui ne change pas le plan), on obtient :

$$-2x + y - 3z + 34 = 0$$

Affirmation 5 : vraie

Affirmation 6

La distance d'un point $A(x_0, y_0, z_0)$ à un plan $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$\text{distance} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Coefficients du plan : $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$, $d = 6$

Coordonnées du point A : $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $z_0 = -1$

Numérateur :

$$|2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 6| = |4 + 0 - 3 + 6| = |7| = 7$$

Dénominateur :

$$\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

Ainsi, la distance est de :

$$\text{distance} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

<u>Affirmation 6 : vraie</u>

Affirmation 7

On compare leurs vecteurs directeurs :

- $\overrightarrow{AB} = (5 - 2, -3 - 0, 7 - (-1)) = (3, -3, 8)$
- La droite (d) est donnée par :

$$\begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases} \Rightarrow \text{vecteur directeur } \vec{v} = (2, 0, -5)$$

Les deux vecteurs directeurs sont différents, et on vérifie facilement qu'ils ne sont pas colinéaires (par exemple, aucun rapport constant ne relie les composantes : $\frac{3}{2} \neq \frac{-3}{0}$, etc.).

Les droites ne sont donc pas parallèles.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3t \\ z = -1 + 8t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

La droite (d) est déjà donnée par :

$$\begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

On cherche s'il existe des réels t et k tels que les deux droites passent par le même point, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2 + 3t = -12 + 2k \\ -3t = 6 \\ -1 + 8t = 3 - 5k \end{cases}$$

Deuxième équation :

$$-3t = 6 \Rightarrow t = -2$$

Remplaçons dans la première :

$$2 + 3(-2) = -12 + 2k \Rightarrow -4 = -12 + 2k \Rightarrow 2k = 8 \Rightarrow k = 4$$

Vérifions la troisième :

$$-1 + 8(-2) = -1 - 16 = -17$$

et

$$3 - 5(4) = 3 - 20 = -17$$

L'égalité est vérifiée : les deux droites ont un point commun, donc elles se coupent.

Ainsi, les droites sont sécantes et non parallèles. Donc elles sont coplanaires.

<u>Affirmation 7 : fausse</u>

EXERCICE 4 (5 points)

<u>Partie A</u>

1.a Il s'agit d'un produit de deux fonctions dérivables :

- $u(x) = e^x$, donc $u'(x) = e^x$
- $v(x) = \sin(x)$, donc $v'(x) = \cos(x)$

Par la formule de dérivation d'un produit :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = e^x\sin(x) + e^x\cos(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$$

1.b On regarde le signe de $f'(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$.

- $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$
- Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq 0$ et $\cos(x) \geq 0$, donc $\sin(x) + \cos(x) > 0$

Donc $f'(x) > 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, ce qui prouve que f est strictement croissante sur cet intervalle.

2.a On cherche l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe de f au point d'abscisse 0.

- $f(0) = e^0 \cdot \sin(0) = 1 \cdot 0 = 0$
- $f'(0) = e^0(\sin(0) + \cos(0)) = 1 \cdot (0 + 1) = 1$

La tangente au point $x = 0$ a donc pour équation :

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 0 + 1 \cdot x = x$$

2.b On dérive $f'(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[e^x(\sin(x) + \cos(x))] = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + e^x(\cos(x) - \sin(x))$$

$$f''(x) = e^x[(\sin(x) + \cos(x)) + (\cos(x) - \sin(x))] = e^x[2\cos(x)]$$

Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geq 0$, donc $f''(x) \geq 0$. Ainsi, f est convexe sur cet intervalle.

2.c On utilise la convexité de f et le fait que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$: cela signifie que sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $f(x) \geq x$ (propriété des fonctions convexes au-dessus de leur tangente en un point).

Or ici, $f(x) = e^x \sin(x)$, donc :

$$e^x \sin(x) \geq x \quad \text{sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

3. Un point d'inflexion est un point où la convexité change, donc où $f''(x) = 0$ et change de signe.

On a :

$$f''(x) = 2e^x \cos(x)$$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

- Pour $x < \frac{\pi}{2}$, $\cos(x) > 0$, donc $f''(x) > 0$
- Pour $x > \frac{\pi}{2}$, $\cos(x) < 0$, donc $f''(x) < 0$

Il y a donc changement de signe de f'', ce qui prouve que $\frac{\pi}{2}$ est un point d'inflexion de la courbe de f.

Partie B

1. Première intégration par parties

On pose :

- $u = \sin(x)$, donc $u' = \cos(x)$
- $v = e^x$, donc $v' = e^x$

Alors :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)\,dx = [e^x \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\,dx$$

On calcule le terme de droite :

- $\sin(0) = 0, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
- $e^{\frac{\pi}{2}} \cdot 1 - e^0 \cdot 0 = e^{\frac{\pi}{2}}$

Donc :

$$I = e^{\frac{\pi}{2}} - J$$

Deuxième intégration par parties

On change de choix :

- $u = e^x$, donc $u' = e^x$
- $v = -\cos(x)$, donc $v' = \sin(x)$

Alors :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)\,dx = [-e^x \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\,dx$$

On évalue :

- $\cos(0) = 1, \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
- $-e^{\frac{\pi}{2}} \cdot 0 + e^0 \cdot 1 = 1$

Donc :

$$I = 1 + J$$

2. On a trouvé :

$$I = 1 + J \quad \text{et} \quad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J$$

On additionne les deux égalités :

$$(1 + J) + (e^{\frac{\pi}{2}} - J) = 2I \Rightarrow 1 + e^{\frac{\pi}{2}} = 2I \Rightarrow I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

3. On a montré dans la partie A que sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $f(x) \geq x$, donc l'aire est :

$$\text{Aire} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - \text{g}(x))\, dx$$

On écrit :

$$\text{Aire} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ dx$$

On a déjà trouvé :

- $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)\, dx = \frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$

Donc :

$$\text{Aire} = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8}$$

C'est la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré.