CORRIGE BAC

Année : 2025 **Matière :** Spé maths **Sujet :** Amérique du Nord 2 (secours)

Exercice 1 :

Partie A : Etude de la fonction f

1.

En $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} e^{y} = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1) = -\infty$ car $2 > 0$

Donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$

En $+\infty$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}, xe^{-x} = \frac{x}{e^{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$ par croissance comparée.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1) = +\infty$ car $2 > 0$

Donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$

2.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 2$

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = (1-x)e^{-x} + 2}$.

3.

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x}$

$$f''(x) = -(2-x)e^{-x}$$

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f''(x) = (x-2)e^{-x}}$.

4.

Pour étudier la convexité de f, on étudie le signe de f''.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc les fonctions f'' et $x \mapsto x-2$ ont le même signe sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

La fonction f'' est positive sur $[2,+\infty[$ donc $\boxed{f \text{ est convexe sur } [2,+\infty[.}$

La fonction f'' est négative sur $]-\infty,2]$ donc $\boxed{f \text{ est concave sur }]-\infty,2].}$

5.

La fonction f'' est positive sur $[2,+\infty[$ donc $\boxed{f' \text{ est croissante sur } [2,+\infty[.}$

La fonction f'' est négative sur $]-\infty,2]$ donc $\boxed{f' \text{ est décroissante sur }]-\infty,2]}$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de f'	↘	$2-e^{-2}$	↗

En effet, $\boxed{f'(2)=(1-2)e^{-2}+2=2-e^{-2}}$.

6.

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $e^x \leq e^0 = 1$.
Comme $1 < 2$, $e^{-2} < 2$ (on a bien $-2 \in]-\infty, 0]$).
On en déduit que $2 - e^{-2} > 0$.
D'après le tableau de variations de la question précédente, on trouve que :
Pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ et donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

7.

La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante (d'après la question précédente) sur $\mathbb{R}$.
De plus, d'après la question 1, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty, +\infty[$.
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $\boxed{\text{il existe un unique réel } \alpha \text{ tel que } f(\alpha)=0}$.

D'après la calculatrice, $f(0{,}37) \approx -0{,}004 < 0$ et $f(0{,}38) \approx 0{,}02 > 0$.
Ainsi, $\boxed{0{,}37 \leq \alpha \leq 0{,}38}$.

8.

Pour cela, on étudie le signe sur $\mathbb{R}$ de $f(x) - (2x-1)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) - (2x-1) = xe^{-x} + 2x - 1 - (2x-1) = xe^{-x}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc $f(x) - (2x-1)$ est du même signe que x sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, pour tout $x \in]-\infty, 0], f(x) - (2x-1) \leq 0$ et pour tout $x \in [0, +\infty[, f(x) - (2x-1) \geq 0$
Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) - (2x-1) = 0 \Leftrightarrow xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{-x} = 0$ (impossible) $\Leftrightarrow x = 0$.
Ainsi, $\boxed{C_f \text{ est en-dessous de } \Delta \text{ sur }]-\infty,0] \text{ et } C_f \text{ est au-dessus de } \Delta \text{ sur } [0,+\infty[. C_f \text{ et } \Delta \text{ s'interceptent au point d'abscisse } 0.}$

Partie B : Calcul d'aire

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties.
On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x$. Ainsi, $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 1$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, n]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1, n]$.
On a donc :

$$I_n = [-xe^{-x}]_1^n - \int_1^n -e^{-x} dx.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = (-ne^{-n} + e^{-1}) - [e^{-x}]_1^n$$
$$I_n = -ne^{-n} + e^{-1} - e^{-n} + e^{-1}$$

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, I_n = 2e^{-1} - (n+1)e^{-n}}$.

2.

a.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_1^n xe^{-x}dx = \int_1^n \big(f(x) - (2x-1)\big)dx = \int_1^n f(x)dx - \int_1^n (2x-1)dx$ par linéarité de l'intégrale.

Donc, I_n est l'aire du domaine compris entre C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$ à laquelle on retire l'aire du domaine compris entre la droite Δ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

Il reste donc l'aire du domaine compris entre C_f, Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

Ainsi, $\boxed{I_n \text{ est l'aire du domaine } D_n}$.

b.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n = 2e^{-1} - ne^{-n} - e^{-n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ par composition.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, ne^{-n} = \frac{n}{e^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$ par croissance comparée.

Ainsi, par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 2e^{-1}$.

Grâce à la question précédente, on en déduit $\boxed{\text{l'aire du domaine } D_n \text{ tend vers } 2e^{-1} \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$.

Exercice 2 :

1.

Un vecteur directeur de la droite D et $\vec{u} = (-1, 3, 4)$ et un vecteur directeur de la droite D' est $\vec{v} = (2, -6, -8)$ d'après leurs représentations paramétriques respectives.

On remarque que $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v}$ donc les vecteurs directeurs respectifs des droites D et D' sont colinéaires, donc les droites D et D' sont parallèles.

Ainsi, $\boxed{\text{l'affirmation est vraie.}}$

2.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (3, 0, -5)$ et $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (8, 0, 8)$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan défini par les points A, B et C car les points A, B et C ne sont pas alignés d'après l'énoncé.

Reprenons le vecteur $\vec{u} = (-1, 3, 4)$ qui est un vecteur directeur de la droite D.

$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = -1 \times 3 + 3 \times 0 + 4 \times (-5) = -23 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux. Ainsi, la droite D n'est pas orthogonale au plan défini par les points A, B et C.

Ainsi, $\boxed{\text{l'affirmation est fausse}}$.

3.

Pour savoir si les droites D et Δ sont sécantes, on cherche t et t' tels que les représentations paramétriques de D et Δ donnent le même point.

Il faut donc résoudre le système :

$\begin{cases} 3 - t = -4 + 2t' \\ -2 + 3t = 1 - 3t' \\ 1 + 4t = 2 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 2t' = 7 \\ 3t + 3t' = 3 \\ 4t - t' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 2t' = 7 \\ t + t' = 1 \\ 4t - t' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 6 \\ t = 1 - t' = -5 \\ 4t - t' = 1 \end{cases}$ en soustrayant la deuxième ligne à la première.

Le couple (t, t') trouvé vérifie-t-il la dernière équation ?

$4 \times (-5) - 6 = -20 - 6 = -26 \neq 1$. Le couple (t, t') trouvé n'est pas solution. Le système n'admet aucune solution donc les droites D et Δ ne sont pas sécantes.
Ainsi, $\boxed{\text{l'affirmation est fausse}}$.

4.
Le point F appartient bien au plan P car $2x_F - 3y_F + z_F - 6 = 2 \times (-3) - 3 \times (-3) + 3 - 6 = 0$.
Le point $G = (0,0,6)$ appartient bien au plan P car $2x_G - 3y_G + z_G - 6 = 0 - 0 + 6 - 6 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{FG}$ est donc un vecteur du plan P
$\overrightarrow{FG} = (x_G - x_F, y_G - y_F, z_G - z_F) = (3, 3, 3)$.
Le point $H = (0, -2, 0)$ appartient aussi au plan P car $2x_H - 3y_H + z_H - 6 = 0 - 3 \times (-2) + 0 - 6 = 0$.
$\overrightarrow{FH} = (x_H - x_F, y_H - y_F, z_H - z_F) = (3, 1, -3)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont non colinéaires donc définissent le plan P.
D'autre part, $\overrightarrow{EF} = (x_F - x_E, y_F - y_E, z_F - z_E) = (2, -3, 1)$.
$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FG} = 3 \times 2 + 3 \times (-3) + 3 \times 1 = 0$ et $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FH} = 3 \times 2 + 1 \times (-3) + (-3) \times 1 = 0$.
Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est bien orthogonal au plan P, car il est orthogonal à deux vecteurs définissant le plan P, d'où F est bien le projeté orthogonal du point E sur le plan P.
Ainsi, $\boxed{\text{l'affirmation est vraie}}$.

5.
Supposons qu'une telle valeur de a existe. La valeur $-a$ convient également car une équation du plan alors obtenu est $-3x + y - (-a)^2 z + 3 = 0$, soit $-3x + y - a^2 + 3 = 0$, ce qui donne le même plan P'.
On en déduit que, soit un tel a n'existe pas, soit il existe, mais il n'est pas unique.
Ainsi, $\boxed{\text{l'affirmation est fausse}}$.

Exercice 3 :

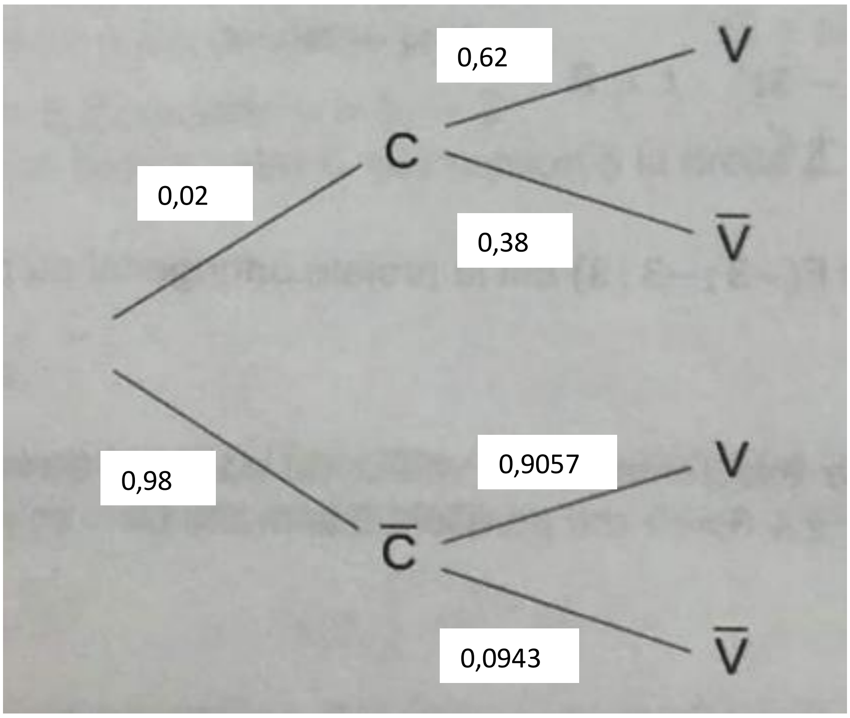
1.
D'après l'énoncé, $\boxed{P(C) = 0{,}02, P(V) = 0{,}9 \text{ et } P_C(V) = 0{,}62}$.

2.

a. Par définition, $P_C(V) = \frac{P(C \cap V)}{P(C)}$.
Ainsi, $P(C \cap V) = P_C(V)P(C)$.
Avec les valeurs de la question précédente, $\boxed{P(C \cap V) = 0{,}62 \times 0{,}02 = 0{,}0124}$.

b.
Les événements C et $\bar{C}$ forment une partition de l'univers.
Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(V) = P(C \cap V) + P(\bar{C} \cap V)$.
Donc, $P(\bar{C} \cap V) = P(V) - P(C \cap V)$
Ainsi, $\boxed{P(\bar{C} \cap V) = 0{,}9 - 0{,}0124 = 0{,}8876.}$

3.



$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$
$P_C(\bar{V}) = 1 - P_C(V) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38.$
$P_{\bar{C}}(V) = \frac{P(\bar{C} \cap V)}{P(\bar{C})} = \frac{0{,}8876}{0{,}98} \approx 0{,}9057$ de même qu'à la question 2a.
$P_{\bar{C}}(\bar{V}) = 1 - P_{\bar{C}}(V) \approx 1 - 0{,}9057 = 0{,}0943.$

4.

$P_V(C) = \frac{P(V \cap C)}{P(V)} = \frac{0{,}0124}{0{,}9} \approx 0{,}0138.$
Ainsi, la probabilité qu'une personne ait été contaminée sachant qu'elle a été vaccinée est d'environ 0,0138. Donc, environ 1,38% des personnes vaccinées ont été contaminées.

5.

a.

A la question 3, on a vu que $P_{\bar{C}}(V) \approx 0{,}9057$ et $P_{\bar{C}}(\bar{V}) \approx 0{,}0943$. Ainsi, parmi les personnes non contaminées, environ 90,57% ont été vaccinées et environ 9,43% n'ont pas été vaccinées. Ainsi, il n'y a pas 10 fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées parmi les personnes non contaminées.
L'affirmation est fausse.

b.

$P_V(\bar{C}) = 1 - P_V(C) \approx 1 - 0{,}0138 = 0{,}9862$. Ainsi, 98,62% de la population vaccinée n'a pas été contaminée.
L'affirmation est vraie.

6.

a.

Choisir un habitant est une expérience de Bernoulli dont le succès est « la personne est contaminée » de probabilité $0{,}02$.

On reproduit 20 fois cette expérience de façon identique et indépendante (la population du pays est assez importante pour pouvoir assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise d'après l'énoncé). On obtient donc un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 20$ et $p = 0{,}02$

La variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes contaminées suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;0{,}02)$.

b.

La probabilité pour que k personnes (avec k entier compris entre 0 et 20) soient contaminées est $P(X = k) = \binom{20}{k}0{,}02^k(1 - 0{,}02)^{20-k}$ par X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;0{,}02)$.

Ainsi, $P(X = 4) = \binom{20}{4}0{,}02^4(1 - 0{,}02)^{20-4} \approx 0{,}0006$.

La probabilité pour que 4 personnes exactement du groupe de 20 personnes soient contaminées est d'environ 0,0006.

Exercice 4 :

Partie A : Conjecture

1.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$

2.

Il semble que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Partie B : Etude d'une suite auxiliaire

1.

$\boxed{w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2}}$.

2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1}$ d'après la relation de récurrence sur (u_n).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$.

On en déduit que (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3.

(w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ d'où $u_{n+1} = w_n + \frac{1}{2}u_n$.

Avec la question précédente, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n}$.

5.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Initialisation : $u_0 = 0 = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$. La propriété est vraie au rang $k = 0$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang k. Montrons que la propriété est vraie au rang $k + 1$.

D'après la question précédente, $u_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \frac{1}{2}u_k$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

On en déduit que $u_{k+1} = (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$. La propriété est vraie au rang $k + 1$, elle est donc héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie au rang $k = 0$ et elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On en déduit que : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Partie C : Etude de la suite (u_n)

1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n + 1 - 2n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n(1-n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \geq 0$ car $\frac{1}{2} \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$ donc $-n \leq -1$ (on multiplie par $-1 \leq 0$) et donc $1 - n \leq 0$ (on ajoute 1).

Par produit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(1-n) \leq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante à partir du rang } n = 1}$.

2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0$ donc $u_n \geq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$ et minorée par 0 donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}}$.

3.

On doit résoudre $l = l - \frac{1}{4}l$.

Pour tout $l \in \mathbb{R}, l = l - \frac{1}{4}l \Leftrightarrow l = \frac{3}{4}l \Leftrightarrow \frac{1}{4}l = 0 \Leftrightarrow l = 0$.

Ainsi, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$.