Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques
Amérique du Sud – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (4 points)

1. a. Le jour de la rentrée, l'étudiant a choisi un plat végétarien, donc le 1[er] jour il est certain d'être végétarien : $p_1 = 1$.

La probabilité qu'il choisisse à nouveau un plat végétarien le lendemain (2[e] jour) est alors $p_2 = 0{,}9$.

1. b. On s'intéresse au 3[e] jour. On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités sur trois jours.

Du 1[er] au 2[e] jour :

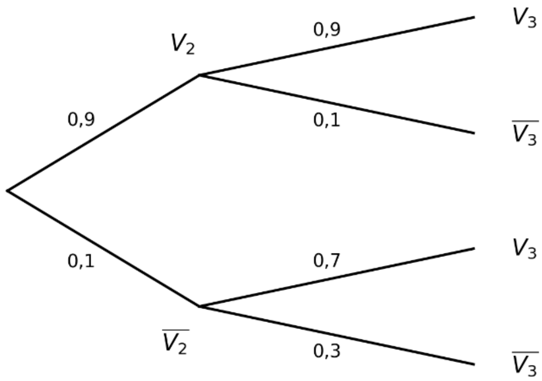
$$P(V_2) = 0{,}9$$

$$P(\overline{V}_2) = 0{,}1$$

Du 2[e] au 3[e] jour :

$$P(V_3 \mid V_2) = 0{,}9$$

$$P(V_3 \mid \overline{V}_2) = 0{,}7$$



On calcule alors :

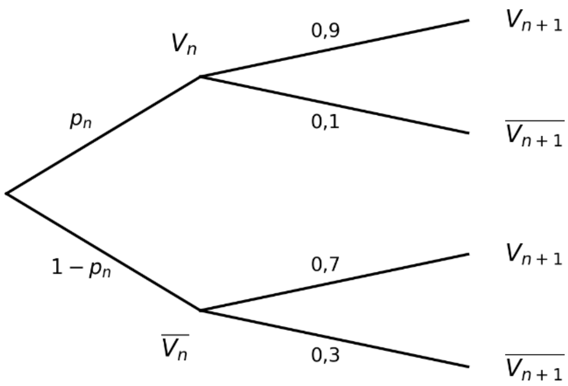
$$p_3 = P(V_3) = P(V_2 \cap V_3) + P(\overline{V}_2 \cap V_3) = P(V_2)\ P(V_3 \mid V_2) + P(\overline{V}_2)\ P(V_3 \mid \overline{V}_2)$$
$$= 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}7 = 0{,}81 + 0{,}07 = 0{,}88$$

1. c. On cherche $P(\overline{V}_2 \mid V_3)$, la probabilité qu'il ait choisi un plat non végétarien le 2[e] jour sachant qu'il a choisi végétarien le 3[e] jour.

On utilise la formule de la probabilité conditionnelle :

$$P(\overline{V}_2 \mid V_3) = \frac{P(\overline{V}_2 \cap V_3)}{P(V_3)} = \frac{0{,}1 \times 0{,}7}{0{,}88} = \frac{7}{88} \approx 0{,}080$$

2. On complète l'arbre pondéré :



3. On veut exprimer $p_{n+1} = P(V_{n+1})$ en fonction de p_n.

D'après la formule des probabilités totales, en utilisant les événements V_n et $\overline{V}_n$:

$$p_{n+1} = P(V_{n+1}) = P(V_n)\,P(V_{n+1} \mid V_n) + P(\overline{V}_n)\,P(V_{n+1} \mid \overline{V}_n)$$

$$p_{n+1} = p_n \times 0{,}9 + (1 - p_n) \times 0{,}7$$

$$p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}7 - 0{,}7p_n$$

$$p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}7$$

4. a. Le programme qui renvoie les n premiers termes de la suite (p_n) est le programme 1.

La programme 2 donne $n + 1$ termes, et le programme 3 donne des valeurs supérieures à 1.

4. b. Calcul des cinq premiers termes :

$$p_1 = 1$$

$$p_2 = 0{,}2 \times 1 + 0{,}7 = 0{,}9$$

$$p_3 = 0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}7 = 0{,}18 + 0{,}7 = 0{,}88$$

$$p_4 = 0{,}2 \times 0{,}88 + 0{,}7 = 0{,}176 + 0{,}7 = 0{,}876$$

$$p_5 = 0{,}2 \times 0{,}876 + 0{,}7 = 0{,}1752 + 0{,}7 = 0{,}8752$$

Donc le programme affiche, pour $n = 5$:

$$[1,\ 0.9,\ 0.88,\ 0.876,\ 0.8752]$$

5. On veut montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$p_n = 0{,}125 \times 0,2^{n-1} + 0{,}875$$

<u>Initialisation :</u>

Pour $n = 1$:

$$p_1 = 1$$

D'après la formule proposée :

$$0{,}125 \times 0,2^{1-1} + 0{,}875 = 0{,}125 \times 0,2^0 + 0{,}875 = 0{,}125 \times 1 + 0{,}875 = 1$$

La propriété est vraie au rang 1.

<u>Hérédité :</u>

On suppose qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que

$$p_n = 0{,}125 \times 0,2^{n-1} + 0{,}875$$

On calcule alors p_{n+1} grâce à la relation de récurrence :

$$p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}7$$

En remplaçant p_n par son expression :

$$p_{n+1} = 0{,}2(0{,}125 \times 0,2^{n-1} + 0{,}875) + 0{,}7$$

$$p_{n+1} = 0{,}2 \times 0{,}125 \times 0,2^{n-1} + 0{,}2 \times 0{,}875 + 0{,}7$$

$$p_{n+1} = 0{,}125 \times 0,2^{n} + 0{,}175 + 0{,}7$$

$$p_{n+1} = 0{,}125 \times 0,2^{n} + 0{,}875$$

Ce qui est bien la formule annoncée au rang $n + 1$.

<u>Conclusion :</u>

La propriété est donc vraie pour $n = 1$ et héréditaire de n à $n + 1$. Par conséquent, pour tout entier $n \geq 1$:

$$p_n = 0{,}125 \times 0,2^{n-1} + 0{,}875$$

6. On utilise l'expression explicite trouvée :

$$p_n = 0{,}125 \times 0,2^{n-1} + 0{,}875$$

On sait que $0,2^{n-1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, car $0{,}2 \in (0{,}1)$.

Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0{,}125 \times 0 + 0{,}875 = 0{,}875$$

Donc la suite (p_n) converge vers $0{,}875$.

En langage courant : à long terme, la probabilité que l'étudiant choisisse un plat végétarien se stabilise autour de 87,5 %.

EXERCICE 2 (5 points)

Attention : Erreur dans la numérotation des affirmations dans l'énoncé. 2 et 3 sont inversés.

1. On a deux équipes de 22 et 25 joueurs. Chaque joueur de la première équipe serre la main de chacun des 25 joueurs de l'autre équipe.

Nombre total de poignées de main :

$$22 \times 25 = 550$$

<u>L'affirmation 1 est fausse.</u>

2. On a 18 concurrents et on récompense « indistinctement les trois premiers », c'est-à-dire que les trois récompensés reçoivent le même prix, sans distinction de 1er, 2e ou 3e.

On doit donc simplement choisir un groupe de 3 personnes parmi 18, sans tenir compte de l'ordre.

Le nombre de possibilités est donc une combinaison :

$$\binom{18}{3} = \frac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2 \times 1} = 816$$

<u>L'affirmation 2 est fausse.</u>

3. Il y a 7 sportifs dont Jacques. On veut compter les podiums ordonnés (1er, 2e, 3e) dans lesquels Jacques apparaît.

On peut raisonner ainsi :

- On choisit la place de Jacques sur le podium : il peut être 1er, 2e ou 3e → 3 possibilités
- Pour chacune de ces positions, il reste 2 places à remplir avec 2 sportifs distincts parmi les 6 autres. Le nombre de façons de les placer, en tenant compte de l'ordre, est :

$$6 \times 5 = 30$$

Donc le nombre total de podiums où Jacques apparaît est :

$$3 \times 30 = 90$$

<u>L'affirmation 3 est vraie.</u>

4. On a deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 de même loi donnée par le tableau de l'énoncé.

On pose $Y = X_1 + X_2$. On cherche $P(Y = 4)$.

On liste les couples de valeurs possibles donnant une somme de 4 :

$$(-1; 5)(2; 2)(5; -1)$$

Grâce à l'indépendance :

$$P(Y = 4) = P\big((X_1 = -1) \cap (X_2 = 5)\big)$$
$$+P\big((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)\big)$$
$$+P((X_1 = 5) \cap (X_2 = -1))$$
$$= 0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}25$$

<u>L'affirmation 4 est vraie.</u>

5. On cherche la probabilité conditionnelle $P(X \geq 18 \mid X \geq 15)$:

$$P(X \geq 18 \mid X \geq 15) = \frac{P\big((X \geq 15) \cap (X \geq 18)\big)}{P(X \geq 15)} = \frac{P(X \geq 18)}{P(X \geq 15)}$$

Avec la calculatrice, on trouve :

$$P(X \geq 15) \approx 0{,}9327$$

$$P(X \geq 18) \approx 0{,}4049$$

Donc :

$$P(X \geq 18 \mid X \geq 15) \approx \frac{0{,}4049}{0{,}9327} \approx 0{,}434$$

<u>L'affirmation 5 est vraie.</u>

EXERCICE 3 (6 points)

<u>Partie A : lectures graphiques</u>

1. Environ 1 heure.

2. Environ $[0{,}3\ ;\ 2{,}5]$.

3. f semble concave sur $[0; 2]$ puis convexe sur $[2; 8]$.

<u>Partie B : détermination de la fonction f</u>

1. Les solutions sont de la forme $y(t) = Ce^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2. On pose $u(t) = ate^{-t}$. La fonction u est dérivable, donc :

$$u'(t) = a(e^{-t} - te^{-t}) = ae^{-t}(1 - t)$$

Ainsi :

$$u'(t) + u(t) = ae^{-t}(1 - t) + ate^{-t} = ae^{-t}$$

Pour que u soit solution de $y' + y = 5e^{-t}$, il faut :

$$ae^{-t} = 5e^{-t} \Leftrightarrow a = 5$$

3. Les solutions de (E) sont la somme d'une solution générale (E') et d'une solution particulière de (E) :

$$y(t) = Ce^{-t} + 5te^{-t}$$

4. On sait que $f(0) = 0$.

Or $f(0) = Ce^0 + 5 \cdot 0 \cdot e^0 = C$, donc $C = 0$

Ainsi :

$$f(t) = 5te^{-t}$$

Partie C : étude de la fonction *f*

1. Par croissances comparées, on obtient :

$$\lim_{t\to+\infty} 5te^{-t} = 0$$

Interprétation : à long terme, la concentration du médicament dans le sang tend vers 0 g/L.

2. La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$. On détermine la dérivée :

$$f'(t) = 5 \times e^{-t} + 5t \times (-1)e^{-t} = 5(e^{-t} - te^{-t}) = 5e^{-t}(1 - t)$$

Comme $5e^{-t} > 0$ pour tout $t \geq 0$, le signe de $f'(t)$ est celui de $1 - t$:

- sur $[0; 1]$, $f'(t) \geq 0$ donc f est croissante.
- sur $[1; +\infty[$, $f'(t) \leq 0$ donc f est décroissante.

De plus :

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = 5e^{-1} \qquad \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$$

Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$5e^{-1}$	$\searrow$	0

3. On cherche $f(t) = 1$, soit $5te^{-t} = 1$.

f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$. Par ailleurs, $f(0) = 0 < 1$ et $f(1) = 5/e \approx 1{,}84 > 1$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $t_1 \in [0; 1]$ tel que $f(t_1) = 1$.

De même, f est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. Par ailleurs, $f(2) = 10/e^2 \approx 1{,}35 > 1$ et $f(3) = 15/e^3 \approx 0{,}75 < 1$.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $t_2 \in [2; 3]$ tel que $f(t_2) = 1$.

À la calculatrice, on obtient :

$$t_1 \approx 0{,}26 \qquad\qquad t_2 \approx 2{,}54$$

4. Le risque de somnolence correspond à $f(t) \geq 1$, donc pour $t \in [t_1; t_2]$.

La durée du risque vaut :

$$t_2 - t_1 \approx 2{,}54 - 0{,}26 = 2{,}28 \text{ heures}$$

La durée du risque est donc d'environ 2 h 17 min.

Partie D

$$T_m = \int_0^1 5\,te^{-t}\,dt = 5\int_0^1 te^{-t}\,dt$$

On effectue une intégration par parties sur $\int_0^1 te^{-t}\,dt$ avec :

$$u = t \qquad\qquad u' = 1$$

$$v' = e^{-t} \qquad\qquad v = -e^{-t}$$

Donc :

$$\int_0^1 t\,e^{-t}\,dt = [uv]_0^1 - \int_0^1 v\ dt = [-te^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}\ dt$$

$$= -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e}$$

$$= 1 - \frac{2}{e}$$

Et finalement :

$$T_m = 5\left(1 - \frac{2}{e}\right) = 5 - \frac{10}{e} \approx 1{,}32$$

EXERCICE 4 (5 points)

1. La droite (CK) passe par $C(0;0;1)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{CK}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};-1\right)$.

Donc une représentation paramétrique est :

$$(x;y;z) = (0;0;1) + t\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};-1\right)$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \dfrac{3}{2}t \\ z = -t+1 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

2. Pour $M(t)$ sur (CK), on a $M(t)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t;\frac{3}{2}t;-t+1\right)$.

Donc :

$$OM(t) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + (-t+1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t^2 + t^2 - 2t + 1}$$

$$= \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$$

3. a. On pose $f(t) = \sqrt{4t^2-2t+1}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(t) = \frac{8t-2}{2\sqrt{4t^2-2t+1}} = \frac{4t-1}{\sqrt{4t^2-2t+1}}$$

Le dénominateur est > 0 , donc le signe de $f'(t)$ est celui de $4t-1$.

Ainsi f est décroissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{4}\right]$ puis croissante sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

x	$-\infty$		$1/4$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	

3. b. Le minimum est atteint quand $4t - 1 = 0$, soit

$$t = \frac{1}{4}$$

4. Le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK) est le point de (CK) le plus proche du point O. D'après la question précédente, ce minimum correspond à $t = 1/4$.

C'est donc le point de coordonnées :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} \,;\, \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} \,;\, -\frac{1}{4} + 1\right)$$

Soit :

$$H\left(\frac{\sqrt{3}}{8}; \frac{3}{8}; \frac{3}{4}\right)$$

5. On remarque que le point H appartient à la droite (CK), et que le droite (CK) est incluse dans le plan (ABC). Ainsi, le point H appartient donc au plan (ABC).

On calcule les produits scalaires montrant que H appartient aux hauteurs.

$$\overrightarrow{BC} = (0; -2; 1) \qquad \overrightarrow{AH} = \left(-\frac{15\sqrt{3}}{8}; \frac{3}{8}; \frac{3}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \times \left(-\frac{15\sqrt{3}}{8}\right) + (-2) \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{4} = -\frac{6}{8} + \frac{6}{8} = 0$$

Donc $(AH) \perp (BC)$: H est sur la hauteur issue de A.

$$\overrightarrow{AC} = (-2\sqrt{3}; 0; 1) \qquad \overrightarrow{BH} = \left(\frac{\sqrt{3}}{8}; -\frac{13}{8}; \frac{3}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = (-2\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{8} + 0 \times \left(-\frac{13}{8}\right) + 1 \times \frac{3}{4} = -\frac{6}{8} + \frac{6}{8} = 0$$

Donc $(BH) \perp (AC)$: H est aussi sur la hauteur issue de B.

Ainsi H est l'intersection de deux hauteurs du triangle ABC, donc H est l'orthocentre du triangle ABC.

6.a. Dans le plan (ABC), on peut prendre deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{\sqrt{3}}{8}; \frac{3}{8}; \frac{3}{4}\right) \qquad \overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{3}; 2; 0) \qquad \overrightarrow{AC} = (-2\sqrt{3}; 0; 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH} = (-2\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{3}{4} = -\frac{6}{8} + \frac{6}{8} = 0$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OH} = (-2\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{8} + 0\times\frac{3}{8} + 1\times\frac{3}{4} = -\frac{6}{8} + \frac{6}{8} = 0$$

Donc $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à deux directions du plan (ABC), ainsi $(OH)\perp(ABC)$.

6. b. Un vecteur normal à (ABC) est donc $\overrightarrow{OH}$. On peut prendre comme vecteur normal suivant :

$$\vec{n} = (\sqrt{3}; 3; 6)$$

(car $(\sqrt{3}; 3; 6) = 8\,\overrightarrow{OH}$).

Une équation du plan est alors :

$$\sqrt{3}\,x + 3y + 6z = d$$

Comme $A(2\sqrt{3}; 0; 0)$ appartient au plan, on a :

$$d = \sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 6$$

Donc une équation de (ABC) est :

$$\sqrt{3}\,x + 3y + 6z = 6$$

7. Puisque le point K est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), alors CK est une hauteur du triangle ABC relative à la base AB.

On calcule les longueurs :

$$AB = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = 4$$

$$CK = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 1} = \sqrt{4} = 2$$

Donc l'aire du triangle ABC vaut :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\times AB\times CK = \frac{1}{2}\times 4\times 2 = 4$$

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/