

Corrigé du bac général 2025

Spécialité Mathématiques

Asie-Pacifique – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue », est autorisé.

Correction proposée par un enseignant en mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (5 points)

Affirmation 1

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Pour que $\vec{j} = (0, 1, 0)$ soit normal au plan (ABC), il faut qu'il soit orthogonal à tous les vecteurs du plan, donc en particulier à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

On calcule les produits scalaires :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$
- $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{j} = (\alpha - 1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + \alpha \cdot 0 = 2 \neq 0$

Donc $\vec{j}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{AC}$, et donc ne peut pas être normal au plan (ABC).

Affirmation 1 : fausse

Affirmation 2

La droite (AC) est parallèle à la droite (d) s'il existe une valeur de α telle que $\overrightarrow{AC}$ soit colinéaire au vecteur directeur de (d), à savoir $\vec{u} = (1, 2, -1)$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = \lambda \\ 2 = 2\lambda \\ \alpha = -\lambda \end{cases}$$

On résoud le système :

- De la 2^{ème} équation : $\lambda = 1$
- Donc : $\alpha - 1 = 1 \Rightarrow \alpha = 2$
- Mais 3^{ème} équation donne $\alpha = -1$: contradiction

Il n'existe aucune valeur de α qui satisfait toutes les équations. Donc les droites (AC) et (d) ne sont jamais parallèles.

Affirmation 2: fausse

Affirmation 3

- $\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le produit scalaire est :

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -1$$

On calcule les normes :

$$\|\overrightarrow{AO}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AO}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \approx -0,707 \Rightarrow \theta \approx \arccos(-0,707) \approx 135^\circ$$

Affirmation 3: vraie

Affirmation 4

On cherche le projeté orthogonal H de A sur (d) . Soit $H = (1 + t, 2t, -t)$

Le vecteur $\overrightarrow{AH} = H - A = \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \\ -t \end{pmatrix}$

Ce vecteur est orthogonal à la droite si $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$, où $\vec{u} = (1, 2, -1)$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = t + 2(2t - 1) + (-t)(-1) = t + 4t - 2 + t = 6t - 2$$

Posons $6t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

Donc les coordonnées de H sont :

$$x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{2}{3}, \quad z = -\frac{1}{3}$$

Ce n'est pas le point $(1, 2, 2)$.

Affirmation 4 : fausse

Affirmation 5

On cherche les points de la droite (d) situés à distance 1 de $O(0; 0; 0)$, donc :

$$M(t) = (1 + t, 2t, -t) \Rightarrow \|\overrightarrow{OM}(t)\|^2 = (1 + t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 1 + 2t + t^2 + 4t^2 + t^2 = 6t^2 + 2t + 1$$

On cherche les t tels que $\|\overrightarrow{OM(t)}\| = 1 \Rightarrow 6t^2 + 2t + 1 = 1 \Rightarrow 6t^2 + 2t = 0$

$$t(6t + 2) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = -\frac{1}{3}$$

Donc la droite (d) coupe la sphère en deux points distincts

Affirmation 5 : vraie

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

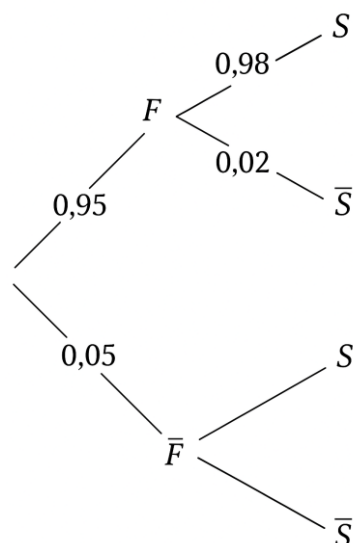
1. On nous dit que :

- 95 % des jouets réussissent le test de fabrication $\rightarrow P(F) = 0,95$
- Parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98 % réussissent le test de sécurité $\rightarrow P_F(S) = 0,98$

2.(a) On construit l'arbre pondéré :

- $P(F) = 0,95$, donc $P(\overline{F}) = 0,05$
- $P_F(S) = 0,98$, donc $P_F(\overline{S}) = 0,02$
- On ne connaît pas directement $P_{\overline{F}}(S)$, mais on nous dit que 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests :

$$P(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0,01$$



2.(b) On utilise la définition de la probabilité conditionnelle :

$$P_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{S})}{P(\bar{F})} = \frac{0,01}{0,05} = 0,2$$

3. On cherche $P(F \cap S)$

$$P(F \cap S) = P(F) \cdot P_F(S) = 0,95 \cdot 0,98 = 0,931$$

Donc la probabilité que le jouet réussisse les deux tests est 0,931.

4. On veut la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité, donc :

$$P(S) = P(F \cap S) + P(\bar{F} \cap S)$$

On a :

- $P(F \cap S) = 0,931$ (vu ci-dessus)
- $P(\bar{F} \cap S) = P(\bar{F}) \cdot P_{\bar{F}}(S) = 0,05 \cdot 0,8 = 0,04$

Donc :

$$P(S) = 0,931 + 0,04 = 0,971$$

Arrondi au centième : 0,97.

5. On cherche $P_F(S)$ conditionné par le fait que le jouet a réussi le test de sécurité, donc :

$$P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0,931}{0,971} \approx 0,9588$$

Arrondi au centième : 0,96.

Partie B

1. La variable aléatoire S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 0,95)$.

On a donc :

- $\mathbb{E}(S_n) = n \cdot 0,95$
- $\text{Var}(S_n) = n \cdot 0,95 \cdot (1 - 0,95) = n \cdot 0,0475$

2.(a) On prend $n = 150$, on veut $P(S_{150} = 145)$.

$$P(S_{150} = 145) = \binom{150}{145} \cdot 0,95^{145} \cdot 0,05^5$$

Valeur approchée via calculatrice :

$$P(S_{150} = 145) \approx 0,109$$

Interprétation : Il y a environ 10,9 % de chances qu'un échantillon de 150 jouets contienne exactement 145 jouets conformes.

2.(b) On veut la probabilité que au moins 94 % des 150 jouets réussissent le test de fabrication. 94 % de 150 = $0,94 \times 150 = 141$

Donc on cherche :

$$P(S_{150} \geq 141) = 1 - P(S_{150} \leq 140)$$

Valeur approchée via calculatrice ou table binomiale :

$$P(S_{150} \geq 141) \approx 0,781$$

3.(a) On pose $F_n = \frac{S_n}{n}$, donc :

$$\mathbb{E}(F_n) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n} = \frac{n \cdot 0,95}{n} = 0,95$$

$$\text{Var}(F_n) = \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = \frac{n \cdot 0,0475}{n^2} = \frac{0,0475}{n}$$

3.(b) On cherche la valeur de n telle que :

$$P(0,93 < F_n < 0,97) \geq 0,96$$

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \leq \frac{\text{Var}(F_n)}{0,02^2} = \frac{0,0475}{n \cdot 0,0004} = \frac{118,75}{n}$$

Donc :

$$P(|F_n - 0,95| < 0,02) \geq 1 - \frac{118,75}{n}$$

On veut que cette quantité soit $\geq 0,96$, donc :

$$1 - \frac{118,75}{n} \geq 0,96 \Rightarrow \frac{118,75}{n} \leq 0,04 \Rightarrow n \geq \frac{118,75}{0,04} = 2968,75$$

Donc il faut prendre $n \geq 2969$.

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A

1. Calcul de u_2 :

$$u_2 = 2 + 0,8 \times u_1 = 2 + 0,8 \times 2 = 2 + 1,6 = 3,6$$

2. On souhaite montrer, par récurrence, que pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = 10 - 8 \times (0,8)^{n-1}$$

Initialisation :

Pour $n = 1$:

$$u_1 = 10 - 8 \times (0,8)^0 = 10 - 8 = 2$$

Hérédité :

Supposons que la formule est vraie au rang n , c'est-à-dire :

$$u_n = 10 - 8 \times (0,8)^{n-1}$$

Montrons qu'elle est encore vraie au rang $n + 1$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 + 0,8u_n = 2 + 0,8(10 - 8 \times (0,8)^{n-1}) = 2 + 8 - 6,4 \times (0,8)^{n-1} \\ &= 10 - 6,4 \times (0,8)^{n-1} \end{aligned}$$

Mais $6,4 \times (0,8)^{n-1} = 8 \times (0,8)^n$, donc :

$$u_{n+1} = 10 - 8 \times (0,8)^n$$

Conclusion : la relation est vraie pour tout $n \geq 1$.

3. On cherche la limite de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

$$u_n = 10 - 8 \times (0,8)^{n-1} \rightarrow 10 \quad \text{car } (0,8)^{n-1} \rightarrow 0$$

Interprétation : La quantité de médicament dans l'organisme tend vers 10 mL à long terme.

4. On veut savoir si l'inéquation $u_N \geq 10$ a des solutions.

Mais on a :

$$u_n = 10 - 8 \times (0,8)^{n-1} < 10 \quad \text{pour tout } n.$$

Donc cette inéquation n'a pas de solution.

Interprétation : La quantité de médicament sera toujours strictement inférieure à 10 mL.

5. On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 9$.

$$10 - 8 \times (0,8)^{n-1} > 9 \Rightarrow 1 > 8 \times (0,8)^{n-1} \Rightarrow (0,8)^{n-1} < \frac{1}{8}$$

On passe au logarithme :

$$(n-1)\ln(0,8) < \ln\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow n-1 > \frac{\ln(1/8)}{\ln(0,8)} \approx \frac{-2,079}{-0,223} \approx 9,32 \Rightarrow n > 10,32$$

Donc $n = 11$ est le plus petit entier qui convient. La quantité de médicament dépasse 9 mL à partir de la 11^{ème} prise.

Partie B

1. On a :

$$S_2 = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{2 + 3,6}{2} = \frac{5,6}{2} = 2,8$$

2. On veut montrer que :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10n - 40 + 40 \times (0,8)^n$$

On utilise l'expression :

$$u_k = 10 - 8 \cdot (0,8)^{k-1}$$

Alors :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (10 - 8 \cdot (0,8)^{k-1}) = 10n - 8 \sum_{k=1}^n (0,8)^{k-1}$$

La somme géométrique vaut :

$$\sum_{k=1}^n (0,8)^{k-1} = \frac{1 - (0,8)^n}{1 - 0,8} = \frac{1 - (0,8)^n}{0,2} = 5 \cdot (1 - (0,8)^n)$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_1 + \dots + u_n &= 10n - 8 \cdot 5(1 - (0,8)^n) = 10n - 40(1 - (0,8)^n) \\ &= 10n - 40 + 40 \cdot (0,8)^n \end{aligned}$$

3. On cherche la limite de S_n :

$$S_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} = \frac{10n - 40 + 40(0,8)^n}{n} = 10 - \frac{40}{n} + \frac{40(0,8)^n}{n}$$

Les deux derniers termes tendent vers 0, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 10$$

4. On observe que la variable s correspond à la formule de S_n . Donc mystere(9) retourne le plus petit entier n tel que :

$$S_n \geq 9$$

5. On veut justifier que la valeur renvoyée par mystere(9) est strictement supérieure à 10.

Cela revient à dire que la valeur de n pour laquelle la moyenne dépasse 9 est supérieure à 10.

Mais on a vu que $u_n > 9$ à partir de $n = 11$, or :

$$S_n \leq u_n \quad (\text{car } u_n \text{ est croissante vers } 10)$$

Donc, pour que la moyenne dépasse 9, il faut plusieurs termes suffisamment grands, ce qui n'est pas le cas avant $n = 11$.

Donc la valeur renvoyée par mystere(9) est bien strictement supérieure à 10.

EXERCICE 4 (5 points)

1.(a) On dérive g :

$$g'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x)$$

1.(b) On veut dériver $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

C'est une fonction de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$, avec :

- $u(x) = e^{\sqrt{x}}$, donc $u'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $v(x) = 2\sqrt{x}$, donc $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Alors, par la formule du quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{e^{\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{4x} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2.(a) On cherche la limite de $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ quand $x \rightarrow 0^+$

- $e^{\sqrt{x}} \rightarrow 1$
- $\sqrt{x} \rightarrow 0$, donc $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$

Alors :

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$$

2.(b) La fonction f tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ a une asymptote verticale en $x = 0$.

3.(a) Limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$

On a :

- $e^{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$
- $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$

Mais exponentielle l'emporte toujours sur toute racine, donc $f(x) \rightarrow +\infty$

3.(b) On étudie le signe de $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$

- Le dénominateur est toujours strictement positif sur $]0; +\infty[$
- Le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe de $\sqrt{x} - 1$

Donc :

- $f'(x) < 0$ pour $x \in]0; 1[$
- $f'(x) = 0$ pour $x = 1$
- $f'(x) > 0$ pour $x > 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
f	$+\infty$	$f(1) = \frac{e}{2}$	$+\infty$

Donc f a un minimum en $x = 1$

3.(c) On veut résoudre $f(x) = 2$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

On sait que f est strictement croissante sur cet intervalle, et :

- $f(1) = \frac{e}{2} \approx 1,36 < 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Donc il existe une unique solution sur $[1; +\infty[$.

On peut chercher une valeur approchée avec la calculatrice :

- $f(2) = \frac{e^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \approx \frac{4,11}{2,83} \approx 1,45$
- $f(4) = \frac{e^2}{2 \cdot 2} = \frac{e^2}{4} \approx \frac{7,39}{4} \approx 1,85$
- $f(5) \approx \frac{e^{\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} \approx \frac{12,18}{4,47} \approx 2,72$

Par lecture graphique ou avec la calculatrice, on trouve :

$$x \approx 4,6 \quad (\text{valeur approchée à } 0,1 \text{ près})$$

4.(a) On veut calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^2 f(x) dx$$

Or on sait que $f(x) = g'(x)$, et $g(x) = e^{\sqrt{x}}$

Donc :

$$I = \int_1^2 g'(x) dx = g(2) - g(1) = e^{\sqrt{2}} - e^1 \approx 4,11 - 2,72 = 1,39$$

4.(b) L'intégrale I correspond à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ entre $x = 1$ et $x = 2$.

5.(a) On pose $X = \sqrt{x}$

Alors :

$$x = X^2 \Rightarrow \sqrt{x} = X \Rightarrow x - 3\sqrt{x} + 3 = X^2 - 3X + 3$$

Cette expression est un polynôme. Le discriminant est :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 12 = -3 < 0$$

Donc ce polynôme est strictement positif pour tout $X \in \mathbb{R}$.

Donc :

$$x - 3\sqrt{x} + 3 > 0 \quad \text{pour tout } x > 0$$

5.(b) On a :

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)}{8x^2\sqrt{x}}$$

Tous les termes sont positifs sur $]0; +\infty[$, d'après 5(a) Donc :

$$f''(x) > 0 \quad \text{pour tout } x > 0$$

Donc f est convexe sur $]0; +\infty[$.