Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques
Asie Remplacement – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

1. Affirmation 1 : vraie

f est un produit : $f(x) = x \times e^{-2x}$

Donc :

$$f'(x) = 1 \times e^{-2x} + x \times (-2)e^{-2x} = (1 - 2x)e^{-2x} = (-2x + 1)e^{-2x}$$

L'égalité annoncée est bien vérifiée.

2. Affirmation 2 : vraie

Avec $y = f$, on a :

$$y'(x) = f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x} \qquad \text{et} \qquad 2y(x) = 2xe^{-2x}$$

Alors :

$$y'(x) + 2y(x) = (1 - 2x)e^{-2x} + 2xe^{-2x} = e^{-2x}$$

Donc f est bien solution de $y' + 2y = e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

3. Affirmation 3 : fausse

On dérive $f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$:

$$f''(x) = (-2)e^{-2x} + (1 - 2x)(-2)e^{-2x} = (4x - 4)e^{-2x} = 4(x - 1)e^{-2x}$$

Comme $e^{-2x} > 0$ pour tout x, le signe de $f''(x)$ est celui de $x - 1$.

Sur $]-\infty; 1]$, on a $x - 1 \leq 0$, donc $f''(x) \leq 0$.

Donc f est concave (et non convexe) sur cet intervalle.

4. Affirmation 4 : vraie

Sur $]-\infty; 0]$, on a $1 - 2x > 0$, donc $f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x} > 0$.

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$.

De plus $f(-1) = -e^2 < -1$ et $f(0) = 0 > -1$. Par continuité, l'équation $f(x) = -1$ admet au moins une solution dans $]-1; 0[$.

Comme f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$, cette solution est unique sur $\mathbb{R}$ car pour $x > 0$ on a $f(x) \geq 0$.

Remarque : Il n'est pas demandé ici de dresser le tableau de variations complet de f. Optimisez votre temps de réponse !

5. Affirmation 5 : vraie

Sur $[0; 1]$, $f(x) = xe^{-2x} \geq 0$, donc l'aire demandée vaut :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 x\, e^{-2x}\, dx$$

Par intégration par parties avec :

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v' = e^{-2x} \qquad v = -1/2\, e^{-2x}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^1 x\, e^{-2x}\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2} e^{-2x}\, dx \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2} + \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-2x}\, dx \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2} + \left[-\frac{1}{4} e^{-2x}\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{3e^{-2}}{4}
\end{aligned}$$

Ce qui correspond bien à l'expression proposée.

EXERCICE 2 (5 points)

1. Dans le repère orthonormé $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a :

$$A(0;0;0) \qquad B(1\,;0\,;0) \qquad G(1\,;1\,;1) \quad I\left(\frac{1}{2};0;0\right) \qquad J\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

2. a) $\overrightarrow{AJ} = (1;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, donc une représentation paramétrique de (AJ) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{2}\,t \\ z = \dfrac{1}{2}\,t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

2. b) $\overrightarrow{IG} = G - I = \left(\frac{1}{2};1;1\right)$, donc une représentation paramétrique de (IG) est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\,t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

2. c) Un point de (AJ) a pour coordonnées $(s;\frac{s}{2};\frac{s}{2})$.

Un point de (IG) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2};t;t\right)$.

On résout :

$$\begin{cases} s = \dfrac{1}{2} + \dfrac{t}{2} \\ \dfrac{s}{2} = t \end{cases}$$

La deuxième équation donne $s = 2t$. En remplaçant dans la première :

$$2t = \frac{1}{2} + \frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4t = 1 + t$$

$$\Leftrightarrow 3t = 1$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Donc :

$$s = 2t = \frac{2}{3}$$

Ainsi le point d'intersection est :

$$S\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$$

Les droites (AJ) et (IG) sont donc sécantes en S.

3. a) Dans le plan (ABG), on peut prendre deux vecteurs directeurs non colinéaires :

$$\overrightarrow{AB} = (1;0;0) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BG} = (0;1;1)$$

Avec $\vec{n} = (0;-1;1)$, on a :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{n}\cdot\overrightarrow{BG} = -1+1 = 0$$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux directions du plan, il est donc normal au plan (ABG).

3. b) Une équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $(0;-1;1)$ passant par $A(0;0;0)$ est :

$$0x - 1y + 1z = 0$$

$$\Leftrightarrow -y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = y$$

3. c) Sur la droite (d), on a : $x = \frac{1}{2}$ $\qquad y = -t \qquad z = 1 + t$

À l'intersection avec le plan $z = y$, on doit donc avoir :

$$1 + t = -t$$

$$\Leftrightarrow 2t = -1$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Ainsi, on a bien :

$$L\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

3. d) On compare les distances (on peut comparer les carrés des distances).

$$LA^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$LB^2 = \left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$LG^2 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Donc $LA = LB = LG$.

Ainsi, le point L est bien équidistant de A, B et G.

4. On a : $\overrightarrow{BA} = A - B = (-1; 0; 0)$ et $\overrightarrow{BG} = G - B = (0; 1; 1)$

Le produit scalaire vaut :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BG} = (-1) \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$$

Donc $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BG}$ et le triangle ABG est rectangle en B.

5. a) Comme L est équidistant de A, B et G, c'est le centre du cercle circonscrit au triangle ABG.

Le centre de gravité est l'intersection des médianes : c'est S.

Le triangle étant rectangle en B, l'orthocentre est B.

5. b) On vérifie l'alignement de L, S et B en comparant deux vecteurs directeurs :

$$\overrightarrow{BS} = S - B = \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{BL} = L - B = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

On constate que :

$$\overrightarrow{BL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BS}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BS}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont donc colinéaires, ce qui prouve que B, S et L sont alignés.

EXERCICE 3 (4,75 points)

1. Chaque question est un essai de Bernoulli (réussite = « bonne réponse ») de probabilité $p = \frac{1}{4}$ et les 10 questions sont indépendantes.

Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$

$$X \sim \mathcal{B}\left(10; \frac{1}{4}\right)$$

2. On calcule à l'aide de la calculatrice :

$$\mathbb{P}(X = 5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{15309}{262144} \approx 0{,}0584$$

3. Pour une loi binomiale, on a :

$$\mathbb{E}(X) = np = 10 \times \frac{1}{4} = 2{,}5$$

Cela signifie qu'en répondant totalement au hasard, Dominique obtient en moyenne 2,5 bonnes réponses sur 10.

4. a. Avoir $Y = 10$ signifie obtenir la note maximale, donc répondre correctement aux 10 questions, soit $X = 10$.

$$\mathbb{P}(Y = 10) = \mathbb{P}(X = 10) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{1}{1048576}$$

4. b. Si Dominique a k bonnes réponses, alors il a $10 - k$ mauvaises réponses, donc :

$$Y = k - 0{,}5 \times (10 - k) = 1{,}5k - 5$$

La note est positive lorsque $Y > 0$, donc lorsque $1{,}5k - 5 > 0$, soit $k > \frac{10}{3} \approx 3{,}33$

Ainsi, la note devient positive à partir de 4 bonnes réponses.

4. c. D'après la question précédente, on a :

$$\mathbb{P}(Y \leq 0) = \mathbb{P}(X \leq 3)$$

On calcule à l'aide de la calculatrice :

$$\mathbb{P}(Y \leq 0) = \mathbb{P}(X \leq 3) \approx 0{,}78$$

4. d. Si Dominique a X bonnes réponses, il a $10 - X$ mauvaises réponses, donc :

$$Y = X - 0{,}5(10 - X) = X - 5 + 0{,}5X = 1{,}5X - 5$$

Résultat déjà montré à la question 4. b.

4. e. Par linéarité de l'espérance, on a :

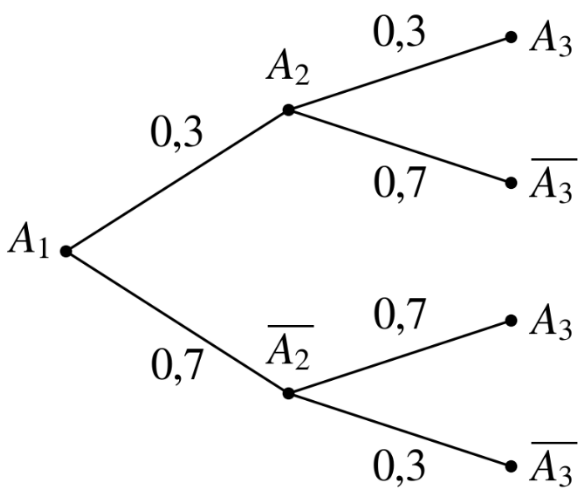
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(1{,}5X - 5)\\ &= 1{,}5\,\mathbb{E}(X) - 5\\ &= 1{,}5 \times 2{,}5 - 5\\ &= -1{,}25\end{aligned}$$

En moyenne, avec ce barème et des réponses au hasard, Dominique obtient $-1{,}25$ point.

EXERCICE 4 (5,25 points)

<u>Partie A</u>

1. On complète l'arbre des probabilités :



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_3 = P(A_3) = P(A_2 \cap A_3) + P(\overline{A_2} \cap A_3) = P(A_2) \times P(A_3 \mid A_2) + P(\overline{A_2}) \times (A_3 \mid \overline{A_2})$$
$$= 0{,}3 \times 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}09 + 0{,}49 = 0{,}58$$

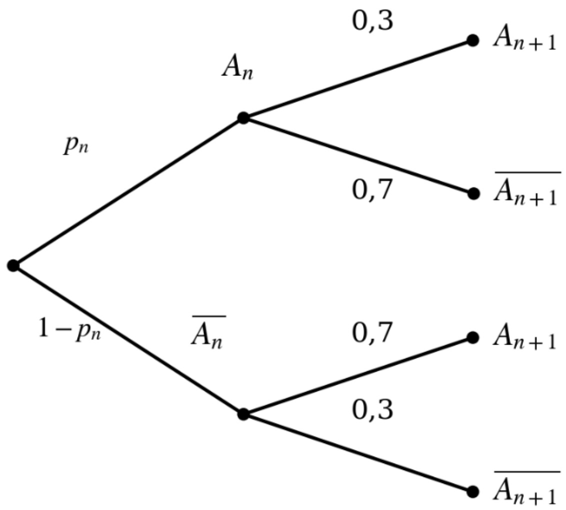
3. On calcule :

$$P_{A_3}(A_2) = P(A_2 \mid A_3) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)}$$

$$= \frac{P(A_2) \times P(A_3 \mid A_2)}{0{,}58} = \frac{0{,}3 \times 0{,}3}{0{,}58} \approx 0{,}16$$

Partie B

1. On complète l'arbre des probabilités :



2. a. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = p_n \times P(A_{n+1} \mid A_n) + (1 - p_n) \times P(A_{n+1} \mid \overline{A_n})$$

$$= 0{,}3p_n + 0{,}7(1 - p_n) = 0{,}3p_n + 0{,}7 - 0{,}7p_n = -0{,}4p_n + 0{,}7$$

2. b. On a :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}5$$

$$= (-0{,}4p_n + 0{,}7) - 0{,}5$$

$$= -0{,}4p_n + 0{,}2$$

$$= -0{,}4(p_n - 0{,}5) = -0{,}4u_n$$

Donc (u_n) est géométrique de raison $-0{,}4$ et $u_1 = p_1 - 0{,}5 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

2. c. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$u_n = u_1(-0{,}4)^{n-1} = 0{,}5(-0{,}4)^{n-1}$$

Donc :

$$p_n = u_n + 0{,}5 = 0{,}5(-0{,}4)^{n-1} + 0{,}5$$

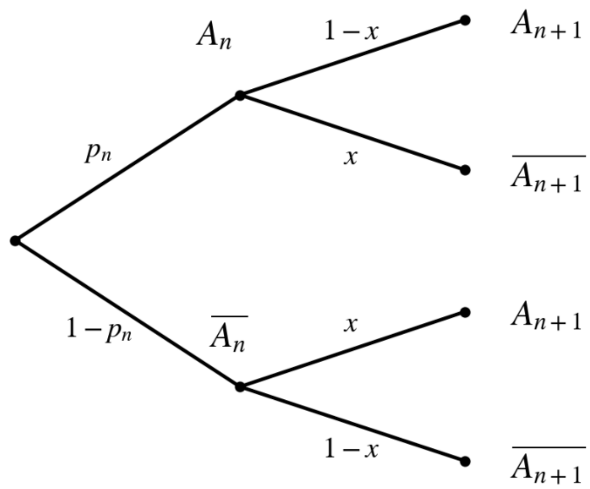
2. d. Comme $|-0{,}4| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}4)^{n-1} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0{,}5$

Ainsi, la suite (p_n) converge vers $0{,}5$.

__Partie C__

1. On a désormais la situation suivante :



Comme précédemment, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(A_{n+1}) &= p_n \times P(A_{n+1} \mid A_n) + (1-p_n) \times P(A_{n+1} \mid \overline{A_n}) \\ &= (1-x)p_n + x(1-p_n) = (1-2x)p_n + x \end{aligned}$$

2. On montre par récurrence que, pour tout $n \geq 1$:

$$p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

__Initialisation__ : Pour $n = 1$, on a :

$$\frac{1}{2}(1-2x)^0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = p_1$$

__Hérédité__ : On suppose la formule vraie au rang n.

Alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = (1-2x)p_n + x &= (1-2x)\left(\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}\right) + x \\ &= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2}(1-2x) + x = \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La récurrence est établie. La propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

3. Comme $x \in]0;1[$, on a $-1 < 1-2x < 1$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} (1-2x)^{n-1} = 0$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0{,}5$$

La suite (p_n) est convergente et sa limite vaut 0,5.

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/