BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 16

L'usage de la calculatrice en mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Tous les exercices doivent être traités.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidates et les candidats sont invités à faire figurer sur leurs copies toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

EXERCICE 1 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$.

On considère :

— α un réel quelconque ;

— les points $A\,(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $B\,(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $C\,(\alpha\ ;\ 3\ ;\ \alpha)$;

— (d) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}\quad , t \in \mathbf{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse,
puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 :

Pour toutes les valeurs de α, les points A, B et C définissent un plan et un vecteur normal à ce plan est $\vec{\jmath}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Affirmation 2 :

Il existe exactement une valeur du réel α telle que les droites (AC) et d sont parallèles.

Affirmation 3 :

Une mesure de l'angle $\widehat{OAB}$ est $135°$.

Affirmation 4 :

Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point H de coordonnées : $H(1\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

Affirmation 5 :

La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre la droite (d) en deux points distincts.
On rappelle que la sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance r de Ω.

EXERCICE 2 (5 points)

Une entreprise qui fabrique des jouets doit effectuer des contrôles de conformité avant leur commercialisation. Dans cet exercice, on s'intéresse à deux tests effectués par l'entreprise :
un test dit *de fabrication* et un test dit *de sécurité*.

À la suite d'un grand nombre de vérifications, l'entreprise affirme que :

- 95% des jouets réussissent le test de fabrication ;
- parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98% réussissent le test de sécurité ;
- 1% des jouets ne réussissent aucun des deux tests.

On choisit au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'événement : « le jouet réussit le test de fabrication » ;
- S l'événement : « le jouet réussit le test de sécurité ».

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, donner les probabilités $P(F)$ et $P_F(S)$.
2. (a) Construire un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé.

   (b) Montrer que $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = 0{,}2$.
3. Calculer la probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests.
4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut $0{,}97$ arrondi au centième.
5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication ? Donner une valeur approchée du résultat au centième.

Partie B

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif. On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à $0{,}95$.
Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication. On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}95$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n.
2. Dans cette question, on pose $n = 150$.
   (a) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(S_{150} = 145)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Déterminer la probabilité qu'au moins 94% des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.
3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.
   Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \dfrac{S_n}{n}$. La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés.
   On note $E\left(F_n\right)$ l'espérance et $V\left(F_n\right)$ la variance de la variable aléatoire F_n.
   (a) Montrer que $E\left(F_n\right) = 0{,}95$ et que $V\left(F_n\right) = \dfrac{0{,}0475}{n}$.
   (b) On s'intéresse à l'événement I suivant : « la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93% et 97% ». En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de jouets à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'événement I est supérieure ou égale à $0{,}96$.

EXERCICE 3 (5 points)

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 mL d'un médicament.
On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en mL, présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.
On a $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = 2 + 0{,}8u_n$.

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2.
2. Montrer, par récurrence sur n, que $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$ pour tout entier naturel n strictement positif.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geq 10$ admet-elle des solutions ? Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.
On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n strictement positif,
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n$$
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.
4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python.

```
def mystere(k):
    n=1
    s=2
    while s<k :
        n=n+1
        s=10-40/n+(40*0.8**n)/n
    return n
```

   Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?
5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.
   (a) Montrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   (b) Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$$

2. (a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   (b) Interpréter graphiquement ce résultat.
3. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
   (c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.
4. On pose $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)dx$.
   (a) Calculer I.
   (b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et que :

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x-3\sqrt{x}+3)}{8x^2\sqrt{x}}$$

   (a) En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   (b) Etudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.