Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques
Centres Etrangers Afrique – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un enseignant en mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

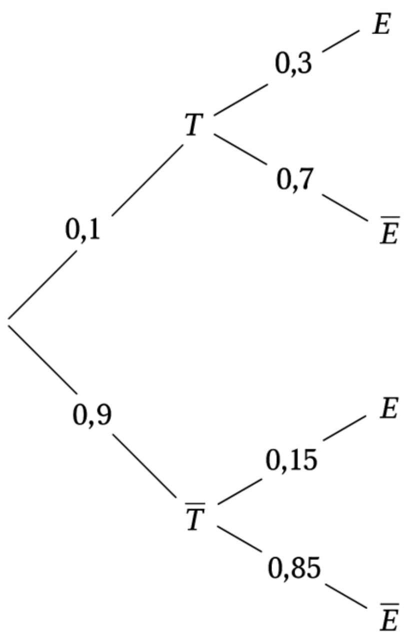
EXERCICE 1 (6 points)

Partie A

1. On donne les probabilités suivantes :

- $P(T) = \frac{1}{10}$, donc $P(\overline{T}) = \frac{9}{10}$
- $P(E|T) = 0{,}3$, donc $P(\overline{E}|T) = 0{,}7$
- $P(E|\overline{T}) = 0{,}15$, donc $P(\overline{E}|\overline{T}) = 0{,}85$

Ce qui donne l'arbre pondéré suivant :



On veut calculer $P(\overline{T} \cap E)$:

$$P(\overline{T} \cap E) = P(\overline{T}) \times P(E|\overline{T}) = \frac{9}{10} \times 0{,}15 = 0{,}135$$

2. On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(T \cap E) + P(\overline{T} \cap E) = \frac{1}{10} \times 0{,}3 + \frac{9}{10} \times 0{,}15 = 0{,}03 + 0{,}135 = 0{,}165$$

3. On cherche $P(T|E)$, la probabilité qu'un contrôle total ait eu lieu sachant qu'une erreur a été détectée. On utilise la formule de Bayes :

$$P(T|E) = \frac{P(T \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}03}{0{,}165} \approx 0{,}18$$

Partie B

1. On a $X \sim \mathcal{B}(15; 0{,}165)$

Les paramètres de la loi binomiale sont donc :

- $n = 15$
- $p = 0{,}165$

2. On cherche $P(X = 5)$:

$$P(X = 5) = \binom{15}{5} \cdot 0,165^5 \cdot (1 - 0{,}165)^{10}$$

En calculant avec une calculatrice :

$$P(X = 5) \approx 0{,}06$$

3. On cherche $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}165)^{15} \approx 0{,}93$

4. On cherche le plus petit entier n tel que :

$$P(X \geq 1) > 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - (1 - 0{,}165)^n > 0{,}99$$

Donc :

$$(1 - 0{,}165)^n < 0{,}01$$

$$0,835^n < 0{,}01$$

On résout :

$$n\ln(0{,}835) < \ln(0{,}01) \Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}835)} \approx \frac{-4{,}605}{-0{,}180} \approx 25{,}6$$

Donc $n = 26$

Partie C

1. On a $X_1 \sim \mathcal{B}(20; 0{,}165)$

Alors :

- $E(X_1) = 20 \times 0{,}165 = 3{,}3$
- $V(X_1) = 20 \times 0{,}165 \times (1 - 0{,}165) = 20 \times 0{,}165 \times 0{,}835 = 2{,}755$

2. Les variables sont indépendantes et identiquement distribuées, donc :

$$E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3{,}3 \times 3 = 9{,}9$$

$$V(S) = V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 2{,}755 \times 3 = 8{,}2665$$

3. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec :

- $E(S) \approx 10$
- $V(S) \approx 8{,}2665$

On cherche :

$$P(6 < S < 14) = P(|S - 10| < 4) \geq 1 - \frac{V(S)}{4^2} = 1 - \frac{8{,}2665}{16} \approx 1 - 0{,}5167 = 0{,}4833$$

Donc la probabilité est bien supérieure à 0,48.

EXERCICE 2 (4 points)

1. Le vecteur directeur de (AB) est :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 5-1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Et le vecteur directeur de (d), donné par la représentation paramétrique, est :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

On regarde si ces deux vecteurs sont colinéaires : il n'existe aucun réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\overrightarrow{AB}$, donc les droites ne sont pas parallèles.

On cherche ensuite s'il existe un point commun aux deux droites.

Pour cela, on résout le système :

$$\begin{cases} -6 + 3t = -3 + 4k \\ 1 = 1 + 4k \\ 9 - 5t = 4 - 2k \end{cases}$$

La 2e équation donne : $4k = 0 \Rightarrow k = 0$

En remplaçant dans la 1ère : $-6 + 3t = -3 \Rightarrow 3t = 3 \Rightarrow t = 1$

On vérifie dans la 3e : $9 - 5 \times 1 = 4 - 2 \times 0 \Rightarrow 4 = 4$

Le système a une solution → les droites sont sécantes.

Enfin, on vérifie si elles sont perpendiculaires : produit scalaire

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 4 \times 3 + 4 \times 0 + (-2) \times (-5) = 12 + 0 + 10 = 22$$

Le produit scalaire est non nul, donc elles ne sont pas perpendiculaires.

Réponse a : sécantes non perpendiculaires

2. Un vecteur normal du plan est $\vec{n} = (4; 4; -2)$.

Or on a vu que $\overrightarrow{AB} = (4; 4; -2)$.

Donc $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.

La droite (AB) est orthogonal au plan P.

Réponse d : orthogonale au plan

3. On commence par comparer les vecteurs normaux :

- $\vec{n}_P = (4; 4; -2)$
- $\vec{n}_{P'} = (2; 1; 6)$

On cherche s'ils sont orthogonaux :

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_{P'} = 4 \times 2 + 4 \times 1 + (-2) \times 6 = 8 + 4 - 12 = 0$$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux → les plans sont donc perpendiculaires

Réponse b : perpendiculaires

4. Les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 + 4 \times 0 + (-2) \times (-5) = 12 + 0 + 10 = 22$$

Normes :

$$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

$$\| \overrightarrow{AC} \| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

Cosinus de l'angle :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{22}{6 \times \sqrt{34}} \approx \frac{22}{34{,}986} \approx 0{,}63$$

Donc l'angle :

$$\widehat{BAC} \approx \arccos(0{,}63) \approx 51°$$

<u>Réponse b : 51°</u>

EXERCICE 3 (6 points)

<u>Partie A</u>

1. On cherche :

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \left(4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}\right)$$

Quand $x \to -1$, alors $x + 1 \to 0^+$, donc

$$\ln(x+1) \to -\infty \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{25} \to \frac{1}{25}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$$

2. Par dérivation :

$$f'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{100 - 2x(x+1)}{25(x+1)} = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

Ce qui est bien la formule attendue.

3. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $]1; +\infty[$.

Le dénominateur $25(x+1)$ est strictement positif.

On étudie donc le signe du numérateur :

$$100 - 2x - 2x^2 = -2x^2 - 2x + 100$$

On résout l'équation $-2x^2 - 2x + 100 = 0$

Discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4(-2)(100) = 4 + 800 = 804$$

Racines :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{804}}{2 \times (-2)} = \frac{2 - \sqrt{804}}{-4}$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{804}}{-4}$$

On n'a pas besoin de la valeur exacte ici, mais on peut estimer que f' s'annule en deux points, et vu le signe de la parabole (ouverte vers le bas), le numérateur est positif entre les deux racines.

Sur l'intervalle $[2; 6{,}5]$, $f'(x) > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

4. On a $h(x) = f(x) - x$, et le tableau indique que :

- $h(2) \approx 2{,}19 > 0$
- $h(6{,}5) \approx -0{,}13 < 0$
- La fonction h est continue sur [2 ; 6,5], car f est dérivable, donc continue.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2; 6{,}5]$.

5. a. Le script Python recherche deux réels encadrant la solution de $f(x) = x$, avec une précision de 10^{-2}.

En exécutant ce script, on obtient approximativement :

```
>>> bornes(2)
(6.36, 6.37)
```

5. b. Ces deux valeurs encadrent la solution α de l'équation $f(x) = x$. Donc $\alpha \in [6{,}36; 6{,}37]$

<u>Partie B</u>

1. Montrons par récurrence que $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6{,}5$

<u>Initialisation</u> :

- $u_0 = 2$
- f est croissante sur [2 ; 6,5], donc $u_1 = f(2) \geq u_0$
- $f(2) \approx 4{,}23 \leq 6{,}5$

Donc propriété vraie au rang 0.

<u>Hérédité</u> :

Supposons que $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6{,}5$. Alors, par croissance de f sur [2 ; 6,5] :

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

et

$$f(u_{n+1}) \leq f(6{,}5) \Rightarrow u_{n+2} \leq 6{,}5$$

Donc la propriété est héréditaire.

<u>Conclusion</u> :

Par récurrence, la suite est bien croissante et majorée par 6,5, et minorée par 2.

2. La suite (u_n) est croissante et majorée par 6,5.

Donc elle converge vers une limite ℓ.

3. Par passage à la limite :

$$\ell = \lim u_{n+1} = \lim\ f(u_n) = f(\ell) \Rightarrow f(\ell) = \ell$$

Donc ℓ est solution de $f(x) = x$, c'est-à-dire que $h(x) = 0$.

On a vu que cette équation a une unique solution $\alpha \in [2; 6{,}5]$.

Donc la limite de la suite est ℓ = α.

EXERCICE 4 (4 points)

<u>Partie A</u>

1. On a $h(t) = \frac{1}{120}$ une fonction constante.

Donc sa dérivée est $h'(t) = 0$, et on calcule :

$$h'(t) + 0{,}48h(t) = 0 + 0{,}48 \times \frac{1}{120} = \frac{0{,}48}{120} = \frac{1}{250}$$

Donc h est bien solution de l'équation différentielle $y' + 0{,}48y = \frac{1}{250}$

2. On considère l'équation homogène associée :

$$y' + 0{,}48y = 0 \Rightarrow y' = -0{,}48y$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre. La solution générale est :

$$y(t) = Ke^{-0{,}48t} \quad \text{où } K \in \mathbb{R}$$

3. L'ensemble des solutions de l'équation complète $y' + 0{,}48y = \frac{1}{250}$ est donné par :

$$y(t) = y_{\text{particulière}}(t) + y_{\text{homogène}}(t)$$

Or, on a vu que $\frac{1}{120}$ est une solution particulière. Donc les solutions sont :

$$y(t) = \frac{1}{120} + Ke^{-0{,}48t}$$

Partie B

1. On a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$

Dérivons $p(t)$ avec la règle de dérivation de l'inverse :

$$p'(t) = -\frac{y'(t)}{y(t)^2}$$

On remplace $y'(t)$ par l'équation différentielle $y' = \frac{1}{250} - 0{,}48y$

Donc :

$$p'(t) = -\frac{\frac{1}{250} - 0{,}48y(t)}{y(t)^2} = -\left(\frac{1}{250y(t)^2} - \frac{0{,}48y(t)}{y(t)^2}\right) = -\left(\frac{1}{250y(t)^2} - \frac{0{,}48}{y(t)}\right)$$

Mais $p(t) = \frac{1}{y(t)}$, donc :

$$p'(t) = -\left(\frac{p(t)^2}{250} - 0{,}48p(t)\right) = \frac{0{,}48p(t)^2 - p(t)^2/250}{1} = \frac{p(t)^2(120 - p(t))}{250}$$

Donc :

$$p'(t) = \frac{1}{250}p(t)(120 - p(t))$$

Ce qui montre que p vérifie l'équation différentielle (E2).

2. On a démontré que $p(t) = \frac{1}{y(t)}$ et que les solutions de (E1) sont :

$$y(t) = \frac{1}{120} + Ke^{-0{,}48t}$$

Donc :

$$p(t) = \frac{1}{\frac{1}{120} + Ke^{-0{,}48t}}$$

On met tout au même dénominateur :

$$p(t) = \frac{120}{1 + 120Ke^{-0{,}48t}} = \frac{120}{1 + K'e^{-0{,}48t}}$$

où $K' = 120K$. On peut poser simplement $K = K'$, donc :

$$p(t) = \frac{120}{1 + Ke^{-0{,}48t}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

3. On sait que $p(0) = 30$

Donc :

$$p(0) = \frac{120}{1 + K} = 30 \Rightarrow 1 + K = \frac{120}{30} = 4 \Rightarrow K = 3$$

4. On cherche $\lim_{t \to +\infty} p(t)$

Quand $t \to +\infty$, alors $e^{-0{,}48t} \to 0$

Donc :

$$p(t) \to \frac{120}{1 + 0} = 120$$

<u>Interprétation</u> **:** La population de bactéries tend vers 120 000 individus à long terme.

5. On veut que la population dépasse 60 000 individus, soit $p(t) > 60$

On cherche le temps t tel que :

$$\frac{120}{1 + 3e^{-0{,}48t}} > 60 \Rightarrow 1 + 3e^{-0{,}48t} < 2 \Rightarrow 3e^{-0{,}48t} < 1 \Rightarrow e^{-0{,}48t} < \frac{1}{3} \Rightarrow -0{,}48t < \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\Rightarrow t > \frac{-\ln(1/3)}{0{,}48} = \frac{\ln(3)}{0{,}48}$$

En valeur numérique :

$$\ln(3) \approx 1{,}0986 \Rightarrow t \approx \frac{1{,}0986}{0{,}48} \approx 2{,}2896$$

En heures et minutes :

$$0{,}2896\text{ h} \approx 0{,}2896 \times 60 \approx 17{,}4\text{ minutes}$$

Donc :

$$t \approx 2\text{ h }17\text{ min}$$